UNIVERSIDAD NACIONAL DE RÍO CUARTO

FACULTAD DE AGRONOMÍA Y VETERINARIA

ACTIVIDADES DE INGRESO

MÓDULO MATEMÁTICA

CREER... CREAR... CRECER

INTRODUCCIÓN

Todo alumno interesado en las Ciencias Agropecuarias muestra afinidad con asignaturas relacionadas con biología, fisiología, morfología, anatomía, patología, maquinarias agrícolas, producción vegetal o animal. Sin embargo, al comienzo de esta nueva etapa de formación y crecimiento, la pregunta más frecuente es ***Matemática, ¿Por qué?, ¿Para qué?*** si yo quiero estudiar Medicina Veterinaria o Ingeniería Agronómica.

El objetivo de este material es satisfacer esta inquietud pensando en que la transmisión de los conocimientos básicos de la asignatura debe hacerse a través de situaciones aplicadas y contextualizadas a las Ciencias Agropecuarias, aumentando el interés y la motivación para así poder comprender la necesidad de adquirir dichos conocimientos.

En este material, cada concepto matemático es explicado y ejemplificado a través de situaciones particulares que introduce al alumno en problemas que encontrará a lo largo de su vida académica y profesional. Esto se ha logrado por la experiencia adquirida en los últimos años participando en proyectos de articulación curricular e interactuando con docentes de distintas asignaturas de la Facultad.

Pretendemos que este módulo sirva como una guía de estudios que permita reflexionar, analizar, discutir resultados e incorporar conceptos sin reemplazar los libros de texto. Para eso te proponemos que, para Unidad del Módulo, resuelvas los ejercicios teniendo en cuenta la fundamentación que se ofrece en la parte teórica, luego intenta pensar qué ejercicios te ofrecieron mayor dificultad, ¿qué hiciste frente a las dificultades y si algunos ofrecen diferentes maneras de resolución, por cuál optaste y por qué?

ÍNDICE ANALÍTICO

CAPITULO I: NÚMEROS

1.1- NÚMEROS NATURALES

Fue el primer conjunto numérico que se conoció y se lo utilizó fundamentalmente para contar. Se lo identifica con N

N = {0, 1, 2, 3, 4,........... }

PROPIEDADES

1.- ***N*** es un conjunto formado por infinitos elementos
2.- ***N*** es un conjunto ***totalmente ordenado***. Es decir, dados dos números naturales, se puede establecer exactamente cual es el mayor y cual es el menor. O sea, si ***a*** y ***b*** son números naturales distintos, entonces:

$$a < b \quad \text{o} \quad b < a$$

3.- ***N*** tiene primer elemento, pero no tiene último elemento. Cualquiera sea el número natural que se elija, siempre es posible hallar su siguiente; basta con sumar uno al número elegido. Pero no siempre es posible hallar su anterior; el cero, por ejemplo, tiene siguiente pero no tiene anterior. Por eso el cero es el primer elemento del conjunto.
4.- ***N*** es en conjunto ***discreto***. Es decir, entre dos números naturales hay un número finito de números naturales.
5.- La suma de dos números naturales es un número natural.
6.- El producto de dos números naturales es un número natural.

1.2- NÚMEROS ENTEROS

El conjunto ***N*** no basta para resolver todos los problemas que se plantean a diario ¿Cómo haríamos para resolver la ecuación: x + 6 = 2? Para ello se crearon los números enteros y se los identifica con ***Z***

Z = {......., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,......}

PROPIEDADES

1.- ***Z*** es un conjunto formado por infinitos elementos.
2.- ***Z*** es un conjunto ***totalmente ordenado***.
3.- ***Z*** no tiene primer elemento ni último elemento. Es decir, todo número entero tiene su anterior y su siguiente.
4.- ***Z*** es un conjunto ***discreto.***
5.- La suma de dos números enteros, es un número entero.
6.- El producto de dos números enteros, es un número entero.
7.- Todo número entero ***a*** tiene su opuesto ***b***, tal que: $a + b = b + a = 0$

1.3- NÚMEROS RACIONALES

Los números fraccionarios se inventaron como respuesta a la necesidad de expresar partes de la unidad, en especial, cuando se realizaban mediciones. Por este motivo, tuvieron un desarrollo apreciablemente anterior al de los números enteros.
Los enteros y las fracciones positivas y negativas forman el conjunto de los números racionales. Este conjunto se indica por ***Q***.
Los números racionales se pueden escribir como fracción o como expresiones decimales. Por ej:

$\frac{3}{5}$ se puede escribir como $0{,}6$ $\qquad$ $2{,}71$ se puede escribir como $\frac{271}{100}$

Dentro de las expresiones decimales, podemos encontrar las exactas y las periódicas. Por ej:

$\frac{3}{4} = 0{,}75$ (expresión decimal exacta)

$\frac{2}{15} = 0{,}1\widehat{3}$ (expresión decimal periódica)

En las expresiones decimales periódicas, hay infinitas cifras decimales a la derecha de la coma, que aparecen con determinada periodicidad (estas cifras se indican dibujándolas debajo de un arco).
Resumiendo:
Los números racionales son aquellos que se pueden expresar como el cociente o razón de dos números enteros. De allí su nombre. La única condición es que el denominador sea distinto de cero.

PROPIEDADES

1.- ***Q*** es un conjunto formado por infinitos elementos.
2.- ***Q*** es un conjunto ***totalmente ordenado***.
3.- ***Q*** no tiene primer elemento ni último elemento.
4.- Entre dos números racionales existen infinitos racionales. Por eso se dice que es un conjunto ***denso***. Como consecuencia de esto, no tiene sentido hablar del anterior y del posterior de un número racional.

SIMPLIFIQUEMOS NÚMERO RACIONALES

Simplificar una fracción es sustituirla por otra equivalente con los términos más sencillos. Esto lo podés hacer cuando numerador y denominador se pueden dividir por un mismo número:

$$\frac{3}{60} = \frac{1}{20}; \qquad \frac{15}{12} = \frac{5}{4}; \qquad \frac{180}{120} = \frac{3}{2}$$

Para que te resulte más fácil es conveniente que simplifiques dos fracciones en varios pasos:

$$\frac{180}{120} = \frac{18}{12} = \frac{9}{6} =$$

*Cuando una fracción no se puede simplificar más, se dice que es **irreducible**.*

Son fracciones irreducibles, por ejemplo:

$$\frac{5}{4}\ ;\ \frac{1}{20}\ ;\ \frac{3}{2}\ ;\ \frac{17}{20}\ ;\ \frac{16}{15}$$

Para ordenar números enteros o por ejemplo números decimales se usa la recta numérica.
Si querés comparar dos expresiones decimales, es necesario que las mismas tengan la misma cantidad de números después de la coma. Para comparar 0,5 y 0,04.
Como 0,5 = 0,50 entonces comparo 0,50 > 0,04 y luego contesto 0,5 > 0,04.

Si quiero comparar 9,12 y 9,135 entonces:
9,12 = 9,120 luego comparo 9,120 < 9,135 y contesto:
9,12 < 9,135
Si quiero comparar 0,00135 y 0,005 entonces:
0,005 = 0,00500 luego comparo 0,00135 < 0,00500 y contesto:
0,00135 < 0,005

1.4- NÚMEROS IRRACIONALES

Los números irracionales son aquellos que no pueden escribirse como el cociente o razón de dos números enteros. Se caracterizan porque a la derecha de la coma decimal, poseen infinitas cifras decimales ***no periódicas***. A este conjunto se lo indica por I. Son números irracionales las raíces de números naturales que no son enteras, π (la relación entre el perímetro y el diámetro de una circunferencia), el número ***e*** (la base de los logaritmos naturales), la raíz cuadrada de 2, etc.

1.5- NÚMEROS REALES

Es el conjunto formado por los números racionales e irracionales. A este conjunto se lo indica por ***"R"***.

N
Naturales

Naturales
Negativos

Z
Enteros

Números
Fraccionarios

Q
Racionales

I
Irracionales

R
Reales

PROPIEDADES

1.- ***R*** es un conjunto formado por infinitos elementos
2.- ***R*** no tiene primer ni último elemento
3.- ***R*** es un conjunto ***denso***
4.- ***R*** es un conjunto ***totalmente ordenado***

1.6- OPERACIONES EN "R"`

MULTIPLICACION

$$a.b = \underbrace{a + a + a + a + ... + a}_{\text{b veces}}$$

Los números ***a*** y ***b*** se denominan ***factores***, y el resultado, ***producto***. Por ej:

$$3.4 = \underbrace{3+3+3+3}_{\text{4 veces}}$$

$$5.2 = \underbrace{5+5}_{\text{2 veces}}$$

REGLA DE LOS SIGNOS

- ✓ si se multiplican dos factores positivos o dos factores negativos, el producto es positivo
- ✓ si se multiplican dos factores de signos distintos, el producto es negativo

PROPIEDADES

1.- Conmutativa:

$$\mathbf{a.b = b.a}$$

Por ej:

3.4 = 4.3 = 12

2.- La multiplicación es distributiva respecto de la suma y la resta:

$$\mathbf{a.(b + c) = a.b + a.c}$$

$$\mathbf{a.(b - c) = a.b - a.c}$$

Por ej:
3.(4 + 5) = 3.4 + 3.5
3.9 = 12 + 15
27 = 27

4.(5 – 3) = 4.5 – 4.3
4.2 = 20 –12
8 = 8

POTENCIACIÓN

$$a^n = \underbrace{a.a.a.a \ldots\ldots\ldots\ldots a}_{n \text{ veces}}$$

Al número ***a*** se lo denomina ***base*** y al número ***n***, exponente. Al resultado, se lo denomina ***potencia.***

Por ej:

$$2^3 = \underbrace{2.2.2}_{3 \text{ veces}} \qquad\qquad 5^2 = \underbrace{5.5}_{2 \text{ veces}}$$

POTENCIA DE EXPONENTE NATURAL

- ✓ si el exponente es un número par, la potencia es positiva
- ✓ si el exponente es un número impar, la potencia lleva el signo de la base

Por ej:

$3^2 = 9$ $\qquad$ $3^3 = 27$

$(-5)^2 = 25$ $\qquad$ $(-2)^3 = -8$

POTENCIA DE EXPONENTE NEGATIVO

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n} = \frac{b^n}{a^n}$$

Por ej:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{4}{3}\right)^{2} = \frac{4^2}{3^2} = \frac{16}{9}$$

PROPIEDADES

1.- La potencia primera de un número es ese mismo número

$$\mathbf{a^1 = a}$$

Por ej:

$5^1 = 5$, $7^1 = 7$

2.- La potencia cero de cualquier número (distinto de cero), es igual a uno

$$\mathbf{a^0 = 1 \qquad (a \neq 0)}$$

Por ej:

$5^0 = 1$ $\qquad$ $(-7)^0 = 1$

3.- La potencia no es distributiva respecto de la suma y la resta

$$\mathbf{(a + b)^n \neq a^n + b^n}$$

$$\mathbf{(a - b)^n \neq a^n - b^n}$$

Por ej:

$(3 + 5)^2 \neq 3^2 + 5^2$

$8^2 \neq 9 + 25$

$64 \neq 34$

$(3 - 5)^2 \neq 3^2 - 5^2$

$(-2)^2 \neq 9 - 25$

$4 \neq -16$

4.- La potencia es distributiva respecto de la multiplicación y la división:

$$(a.b)^n = a^n.b^n$$

$$(a:b)^n = a^n:b^n$$

Por ej:

$(3.4)^2 = 3^2.4^2$

$12^2 = 9.16$

$144 = 144$

$(6:3)^2 = 6^2:3^2$

$2^2 = 36:9$

$4 = 4$

5.- El producto de dos o más potencias de igual base es otra potencia de la misma base donde el exponente resulta de la suma de los exponentes de los factores

$$a^x.a^y = a^{(x+y)}$$

Por ej:

$2^3.2^4 = 2^{(3+4)} = 2^7$

6.- El cociente de dos potencias de igual base es otra potencia de la misma base donde el exponente resulta de la resta de los exponentes del dividendo y del divisor

$$a^x:a^y = a^{(x-y)}$$

Por ej:

$2^5:2^2 = 2^{(5-2)} = 2^3$

7.- Potencia de otra potencia. El resultado es otra potencia de la misma base donde el exponente resulta de la multiplicación de los exponentes

$$(a^x)^y = a^{x.y}$$

Por ej:

$(2^2)^3 = 2^{2..3} = 2^6$

RADICACIÓN

$$\sqrt[n]{a} = r$$

La expresión anterior se lee *"la raíz enésima de a es r"*, donde ***n*** se llama ***índice***, ***a radicando*** y ***r raíz***. El símbolo $\sqrt{\ }$ se llama ***radical***.
Aquí se deben diferenciar los casos en que n es par o impar:

Para n par y a ≥ 0: $\sqrt[n]{a} = r \Rightarrow r^n = a$

Para n impar: $\sqrt[n]{a} = r \Rightarrow r^n = a$ o $\sqrt[n]{-a} = r \Rightarrow r^n = -a$

Por ej:

$\sqrt[2]{9} = 3$

$\sqrt[3]{8} = 2$

$\sqrt[3]{-8} = -2$

PROPIEDADES

1.- La radicación no es distributiva respecto de la suma y la resta:

$$\sqrt[n]{a+b} \neq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{a-b} \neq \sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}$$

Por ej:

$\sqrt{9+16} \neq \sqrt{9} + \sqrt{16}$

$\sqrt{25} \neq 3 + 4$

$5 \neq 7$

$\sqrt{100-36} \neq \sqrt{100} - \sqrt{36}$

$\sqrt{64} \neq 10 - 6$

$8 \neq 4$

2.- La radicación es distributiva respecto de la multiplicación y la división

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{a \div b} = \sqrt[n]{a} \div \sqrt[n]{b}$$

Por ej:

$\sqrt{4\cdot 9} = \sqrt{4}\cdot\sqrt{9}$

$\sqrt{36} = 2\cdot 3$

$6 = 6$

$\sqrt{100\div 25} = \sqrt{100}\div\sqrt{25}$

$\sqrt{4} = 10\div 5$

$2 = 2$

3.- Raíces sucesivas

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[n\cdot m]{x}$$

Por ej:

$\sqrt[3]{\sqrt[2]{64}} = \sqrt[3\cdot 2]{64}$

$\sqrt[3]{8} = \sqrt[6]{64}$

$2 = 2$

4.- Raíz de exponente racional

$$\sqrt[n]{x^m} = x^{m/n}$$

Por ej:

$\sqrt[2]{4^3} = 4^{3/2}$

5.- Simplificación de radicales:

- ✓ **si n es impar:**

$$\sqrt[n]{x^n} = x^{n/n} = x$$

Por ej:

$\sqrt[3]{-2^3} = (-2)^{3/3} = -2$

- ✓ **si n es par:**

$$\sqrt[n]{x^n} = |x|$$

Por ej:

$\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$

1.7- NOTACIÓN CIENTÍFICA

La notación científica es una forma de expresar números que resulta muy conveniente cuando se necesita manipular números muy grandes o muy pequeños. Consiste en expresar al número como un producto entre un número decimal, cuyo valor absoluto sea mayor o igual a uno y menor que diez, y una potencia de diez. Por ej:

$700 = 7.10^{2}$ $\qquad$ $0,0005 = 5.10^{-4}$

$5600 = 5,6.10^{3}$ $\qquad$ $0,0921 = 9,21.10^{-2}$

¿Qué es la notación científica?

Para definir con total claridad lo que esto significa consideremos el siguiente ejemplo:

La población de cierto microorganismo en un determinado medio de cultivo es de 6.000.000.000.

Veamos si encontramos una forma más abreviada para expresar este valor.

Si te fijás, verás que 6.000.000.000 es lo mismo que multiplicar 6 por 1.000.000.000, entonces,

6.000.000.000 = 6 1.000.000.000 = 6 10 10 10 10 10 10 10 10 10 = 6 10^{9} este resultado se lee: "seis por diez a la nueve"

Otro ejemplo sería:

¿Sabías que el tiempo que tarda la luz en atravesar el vidrio de una ventana es de 0,000000000013 segundos?

$$0,0000000000\ 13 = \frac{13}{1000000000000} = \frac{13}{10^{12}} = 13.10^{-12} = 1,3.10.10^{-12} = 1,3.10^{-11}$$

A esta manera de escribir los números se la llama ***notación científica.***

Un número está expresado en notación científica cuando se lo escribe de forma: ***p . 10 ^{k},*** donde p es un número entero o decimal, cuyo valor absoluto es mayor o igual que 1 y menor que 10, y k es un número entero.

1.8- EJERCICIOS DE APLICACIÓN:

Ejercicio N°1: Aplicando las propiedades correspondientes, halla:

a) $\sqrt[3]{\sqrt{729}} =$

b) $\sqrt[3]{\sqrt[5]{x^{30}}} =$

c) $\sqrt[5]{-16}\ \sqrt[5]{2} =$

d) $\sqrt[3]{\frac{5}{8} - \frac{3}{4}} =$

e) $\sqrt[4]{4^{6}} =$

f) $\sqrt{\sqrt{\frac{16}{81}}} =$

g) $\sqrt{12}\ \sqrt{3} =$

h) $\sqrt{\frac{11}{4} - \frac{1}{2}} =$

Ejercicio N°2: Expresa el radical que corresponda:

a) $8^{1/2} =$ b) $5^{2/3} =$

c) $\left(-\frac{1}{4}\right)^{3/2} =$ d) $49^{1/2} =$

e) $2^{3/4} =$ f) $4^{3/5} =$

Ejercicio N°3: Expresa como potencia

a) $\sqrt[5]{7^2} =$ b) $\sqrt{x^4} =$

c) $\sqrt[3]{7} =$ d) $\sqrt[3]{5} =$

e) $\sqrt{x^9} =$ f) $\sqrt[3]{-125} =$

Ejercicio N°4: Calcular las siguientes potencias

a) $\left(\frac{4}{25}\right)^{-1/2} =$ b) $(121)^{-1/2} =$

c) $(-125)^{-1/3} =$ d) $(8)^{-2/3} =$

e) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-3/2} =$ f) $(-32)^{-2/5} =$

Ejercicio N°5: Aplica propiedades para resolver los siguientes ejercicios:

a) $3^{1/2}\ 3^{-2}\ 3^{2/5}\ 3 =$ b) $\left(\frac{4}{9}\right)^{3/4} \left(\frac{4}{9}\right)^{-1} \left(\frac{4}{9}\right)^{1/4} =$

c) $b^{-2/3}\ b^{-2}\ b =$ d) $(-4)^{-4/5} \div (-4)^{1/5} =$

e) $\left(32^{1/2}\right)^{4/5} =$ f) $\left[(-25)^{-4}\right]^{1/2} =$

g) $x^{2/5} \div x^{-3/5} =$ h) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-1} \div \left(\frac{1}{5}\right)^{-2/3} =$

Ejercicio N°6: Resuelve:

a) $8^{-2/3} + (-32)^{-2/5} =$

b) $\left(8a^3 \div b^6\right)^{2/3} =$

c) $\left(\frac{8}{27}\right)^{-2/3} - \left(-\frac{32}{243}\right)^{-2/5} =$

d) $\left(64a^6 \div b^9\right)^{2/3} =$

Ejercicio N°7: Resuelve aplicando las propiedades correspondientes:

a) $\sqrt[3]{\sqrt{64}} =$

b) $\sqrt{5}\ \sqrt{2}\ \sqrt{10} =$

c) $\sqrt[4]{4^6} =$

d) $\sqrt[3]{\sqrt[10]{x^{30}}} =$

e) $\sqrt[3]{\frac{1}{7}} \div \sqrt[3]{49} =$

f) $\sqrt[5]{-16}\ \sqrt[5]{2} =$

g) $\sqrt{\frac{11}{4} - \frac{1}{2}} =$

Ejercicio N°8: Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. En este último caso justifique su respuesta.

a) a . 0 = 0
b) (-a) . (-b) = - (a.b)
c) a + (-b + c) = a - b + c
d) a : (b + c) = (a : b) + (a : c) , siendo $b+c \neq 0$; $b \neq 0$ y $c \neq 0$
e) a - (b + c) = a - b + c
f) (b + c) : a = (b : a) + (c : a) ; con $a \neq 0$
g) Si a = -2 y b = 0 entonces a : b = 0
h) el cociente entre un número y su opuesto es igual a -1.
i) $a \in R$, $a : a^{-1} = 1$
j) $a \in R$, $(a^{-1})^{-1} = a$
k) a . (-b) = a . b
l) a . (b - c) = a . b - a . c
m) - (- a) = a

Ejercicio Nº 9: En los siguientes cálculos se han cometido errores al aplicar las propiedades. Se propone indicar cuales son y corregirlos:

1) $(2^2 . 2^{-3} . 2^5)^2 = (2^4)^2 = 2^{16}$

2) $(5^2)^4 : (5^{-3})^2 = 5^8 : 5^{-6} = 1^{14} = 1$

3) $(7^4 . (7^2)^6)/(7^9)^2 = (7^4\ 7^{12})/ 7^{18} = 7^{-2} = (-7)^2 = 49$

4) $(7.\ 2 - 14)^0 + 5^0 = 2$

Ejercicio Nº 10: Aplicando las propiedades de la potenciación demostrar que:

1) $(a + 2)^2 - (a - 2)^2 - 4(2a + 1) = - 4$

2) $(3\ .\ 3^{n+1} + 3^{\ n+2})^3 : (3^{\ n+2})^3 = 8$

3) $(10\ .\ 2^{n+1})^3 : (2^{\ n+1})^3 = 1000$

4) $2^{2-n}\ .\ (2\ .\ 2^{n+1} + 2^{n+2}) = 32$

Ejercicio N°11: Resolver los siguientes ejercicios combinadas, detallando todos los cálculos:

a) $\dfrac{\left(1-\frac{3}{2}\right).\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{4}\right)^2}{\left(\frac{1}{3}-1\right).\left(\frac{2}{3}-2\right)^2} =$

b) $\dfrac{1-\frac{3}{2}.\frac{2}{3}-\left(\frac{3}{4}\right)^2}{\left(\frac{1}{3}-1\right)^2:\frac{2}{3}-(2)^2} =$

c) $\left[\left(-\frac{3}{2}\right)^2\right]^{-1}:\dfrac{1}{27}+1=$

d) $\dfrac{\sqrt[3]{\sqrt{64}}+\frac{1}{5}:(-3-2)^{-2}}{1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} =$

e) $\sqrt{(2-4)^2}+2\cdot\left(1-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)^{-2} =$

f) $\dfrac{\sqrt{\frac{7}{12}+\frac{4}{9}-\frac{1}{36}}}{1-\frac{2}{3}} =$

g) $\dfrac{\sqrt{0{,}5^2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2}}{(0{,}5+1)^2}+1=$

$\dfrac{\frac{3}{5}+\frac{2}{9}:\frac{5}{18}+\frac{3}{2}\cdot\left(2-\frac{1}{2}\right)}{\left[\left(\frac{5}{2}+\frac{21}{20}\right)-3\right]:\left(1-\frac{4}{5}\right)} =$

Ejercicio Nº 12: Verificar si se satisfacen las siguientes igualdades:

- $\sqrt[3]{(a\cdot b+c)^2}=\sqrt[3]{a\cdot b+c}\cdot\sqrt[3]{a\cdot b+c}$

- $\dfrac{\left[\left(a\cdot\sqrt[6]{a}\right)^6+\left(2\cdot\sqrt[6]{a^7}\right)^6\right]:a^7}{(a^n+b)\cdot(a^n-b):(a^{2n}-b^2)}=65$

- $\left(2\cdot a^2+b\cdot c^3\right)^2=4\cdot a^4+4\cdot a^2\cdot b\cdot c^3+b^2\cdot c^6$
- $\dfrac{\dfrac{x+y}{4\cdot x}}{\dfrac{5}{x+2}}=\dfrac{x^2+2\cdot x+y\cdot x+2\cdot y}{20\cdot x}$
- $\dfrac{a^5\cdot b^{-5}\cdot c^3}{b^2\cdot c^0\cdot d}=\dfrac{a^5\cdot c^3}{b^7\cdot d}$
- $-a\cdot\left(a^{-2}\cdot b^2+a^2\cdot c\right)=\dfrac{-b^2}{a}-a^{3\cdot}\cdot c$
- $\left\{a^{3+n}\cdot\left[\dfrac{a^{-n}}{a^3}+\dfrac{\left(\sqrt[3]{a^n}\right)^{\frac{3}{n}}}{a^3\cdot a^n}\right]\right\}^2=a^2+2\cdot a+1$

Ejercicio N°13: Escribe en notación científica los siguientes números:

a) 7980000000 =

b) 0,00000000259 =

c) 0,00000007 =

d) 7000000000000 =

e) 5789000 =

f) 0,00015 =

g) 5800 =

h) $79\ \ 10^{-10}$ =

i) $135\ \ 10^{10}$ =

Ejercicio N°14: Resuelve los siguientes cálculos y expresa los resultados en notación científica:

a) $2{,}1\,10^8\ \ 3\,10^5=$

b) $\left(8\,10^9\right)\div\left(2\,10^7\right)=$

c) $\left(3{,}12\,10^4\ \ 5\,10^7\right)\div\left(15\,10^3\right)=$

d) $5{,}2\,10^9\div 2{,}6\,10^7+1{,}7\,10^3=$

CAPÍTULO II: RAZÓN Y PROPORCIÓN NUMÉRICA

2.1- RAZÓN ENTRE DOS NÚMEROS:

La razón entre dos números **a** y **b** es el cociente $\frac{a}{b}$, por ejemplo la razón entre 10 y 2 es 5, ya que $\frac{10}{2} = 5$ y la razón entre los números 0,15 y 0,3 es $\frac{0{,}15}{0{,}30} = \frac{1}{2}$

2.2- PROPORCIÓN NUMÉRICA:

Los números **a**, **b**, **c** y **d** forman una proporción si la razón entre **a** y **b** es la misma que entre **c** y **d**, es decir $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, esto se lee de la siguiente manera: *"a es a b como c es a d"*.

Por ejemplo, los números 2:5 y 8:20 forman una proporción, ya que la razón entre 2 y 5 es la misma que la razón entre 8 y 20, es decir $\frac{2}{5} = \frac{8}{20}$

En la proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ hay cuatro términos; **a** y **d** *se llaman extremos*, **c** y **b** *se llaman medios*.

La propiedad fundamental de las proporciones es:

"En toda proporción, el producto de los extremos es igual al de los medios".

Así en la proporción anterior $\frac{2}{5} = \frac{8}{20}$ se cumple que el producto de los extremos da 2 20 = 40 y el producto de los medios da 5   8 = 40

$$\textbf{EN GENERAL: } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a\ d = b\ c$$

2.3- MAGNITUDES DIRECTAMENTE PROPORCIONALES

Si dos magnitudes son tales que, a doble, triple ... cantidad de la primera corresponde doble, triple... de la segunda, entonces se dice que esas magnitudes son directamente proporcionales.

Ejemplo 1:

Una bolsa de fertilizante (urea) pesa 20 Kg ¿Cuánto pesan 2 bolsas?

Un cargamento a granel de urea pesa 520 Kg ¿Cuántas bolsas se podrán llenar?

Número de bolsas	1	2	3	...	26	...
Peso en Kg.	20	40	60	...	520	...

Para pasar de la 1ª fila a la 2ª basta multiplicar por 20

Para pasar de la 2ª fila a la 1ª dividimos por 20

Observa que $\frac{1}{20} = \frac{2}{40} = \frac{3}{60} = \ldots$

Las magnitudes número de bolsas y peso en Kg son directamente proporcionales.

La constante de proporcionalidad para pasar de número de bolsas a Kg es 20.

2.4- <u>REGLA DE TRES SIMPLE DIRECTA</u>

La regla de tres es una operación que consiste en encontrar el cuarto término de una proporción, a la que solo se le conocen tres términos.

Puede ser simple cuando solamente intervienen en ella dos variables o compuesta cuando intervienen tres o más variables.

Toda regla de tres presenta una incógnita y una hipótesis. La hipótesis está constituida por los datos del problema que se conocen y la incógnita por el dato que se busca. De acuerdo a la relación con la incógnita, puede ser directa cuando los aumentos en una variable provocan aumento en la otra variable o inversa cuando los aumentos en una variable provocan disminución en la otra variable.

Ejemplo 2:

Un estudiante debe llegar a un campo para realizar una actividad práctica. Para ello debe recorrer un trayecto de 85 Km. asfaltados y otro de 35 Km. de tierra.

Si éste en camino asfaltado viaja a 120 Km/h y en camino de tierra lo hace a 90 Km/h, ¿cuánto tardará en llegar al campo?

Primero calcularemos el tiempo para recorrer los 85 kilómetros de asfalto y luego el tiempo para recorrer los 35 kilómetros de tierra.

Que la velocidad sea de 120 Km/h significa que en una hora recorre 120 Km, o, dicho de otro modo, para transitar los 120 Km. son necesarios una hora, si en lugar de 120 Km. el estudiante tiene que hacer sólo 85 Km., se puede plantear una sencilla regla de tres simples:

$$\frac{120\,Km}{1h} = \frac{85\,Km}{X\ h}$$

solo queda despejar la incógnita de esta ecuación, Si te animaste, debiste hacer un planteo como el que sigue:

$X = \dfrac{85Km \cdot 1h}{120Km}$ donde $X = 0{,}708\,h$, o lo que es equivalente $X = 42{,}48\,\text{min}$

$$\begin{aligned} &120\,Km ----1\,h \\ &85\,Km\ \ ---- X = ? \end{aligned}$$

donde $X = 0{,}708\,h$, o lo que es equivalente $X = 42{,}48\,\text{min}$

Y ahora seguramente te ánimas a calcular el tiempo que te insumiría hacer los restantes 35 Km. de camino de tierra a 90 Km/h,

Entonces tus cálculos te tienen que haber dado como sigue:

$$\begin{aligned} &90\,Km ----1\,h \\ &35\,Km\ \ ---- X = ? \end{aligned}$$

donde $X = 0{,}38\,h$ o lo que es equivalente

$$\begin{aligned} &1h ----60\,\text{min} \\ &0{,}38h ---- X = ? \end{aligned}$$

donde $X = 22{,}8\,min$.

Ejemplo 3:

La producción de materia verde de un campo en la zona de Río Cuarto es de aproximadamente 42.500 kilogramos por hectárea y por año.

El porcentaje de agua de esa materia verde es de un 81,5 %, ¿Calcular los kilos de materia seca (MS) presente en ella?

Interpretemos qué significa que la materia verde tenga un 81,5 % de agua, esto quiere decir que por cada 100 Kg de materia verde tenemos 81,5 Kg de agua y 18,5 Kg de materia seca.

Como nos piden los kilogramos de materia seca por hectárea y por año caemos de nuevo en una regla de tres:

$$\begin{aligned} &100\,\% \ \ ----\ 42.500\,Kg \\ &18{,}5\,\% \ \ \ ---- X = ? \end{aligned}$$

donde $X = 7862{,}5\,Kg$ MS. Este valor corresponde a la producción de materia seca de la pradera.

Ejemplo 4:

En un lote destinado a la siembra de maíz se realiza un análisis de suelo que tiene en tantos resultados una deficiencia de fósforo, para ello un ingeniero agrónomo aconseja fertilizar poniendo 20 kilogramos de fósforo por hectárea, si el lote posee una superficie de 84 hectáreas, ¿Cuántos kilogramos tendrá que poner el lote?

$$1\ ha \quad ----\ 20\ Kg\ \ de\ fósforo$$
$$84\, ha\ ----X = ?$$

donde $X = 1680\ Kg$ de fósforo.

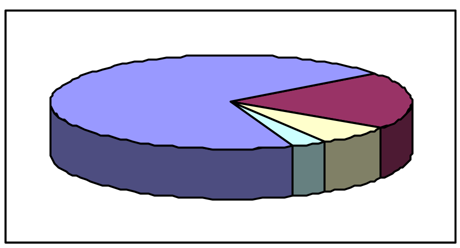
2.5- PORCENTAJE

En casi todas las asignaturas que curses a lo largo de estos años vas a tener que trabajar con porcentajes, pero entonces ¿Qué es porcentaje?

En líneas generales podemos decir que porcentaje “es una parte de un todo”, por ejemplo:

Si vos tenés una pizza de 8 porciones y te comes 2 porciones, te estás comiendo el 25 % de tu pizza.

Es muy común que los porcentajes se representen en diferentes formas gráficas acá te mostramos una de ellas Diagrama de Torta:



Trabajar con porcentajes implica simplemente resolver una regla de tres. Te presentamos algunos conceptos básicos.

Ejemplo 5:

Un cabañero tiene 180 vacas de la raza Hereford y quedan preñadas 140, el índice de preñez es el porcentaje de animales que quedaron preñados respecto del total de animales que fueron servidas y viene dado por:

$$180\, Vacas\ ----\ 100\%$$
$$140\, Vacas ---- X = ?$$

$$X = 77{,}7\,\%$$

Mientras que para calcular el índice de parición se procede de forma similar a la anterior, pero ahora es el porcentaje de animales vivos nacidos respecto del total que nacieron, con lo que:

$$140\ Terneros\ ----\ 100\%$$
$$130\ Terneros----X=?$$
$X=92{,}85\%$ éste será el índice de parición.

Ejemplo 6:

Determine el % MS (materia seca) y de Humedad de un forraje, cuya alícuota de MV (materia verde) fue de 250 g Se colocó en estufa obteniéndose un peso de la alícuota de 63 g de MS.

250 g---------- 100%

63 g ---------- $x = \frac{63}{250} \cdot 100\% = 25{,}2\%$

% de MS = 25,2 %

% de Humedad = 100 – 25,2 = 74,8 %

2.6- <u>EJERCICIOS DE APLICACIÓN</u>

Ejercicio N°1:

Se necesita comprar herbicida, para pasar en un lote con yuyo colorado, el producto comercial está formulado al 42,5 % v/v, esto quiere decir que por cada 100 ml de solución (herbicida) tenemos 42,5 ml del principio activo (soluto). Además, se sabe que el volumen de principio activo recomendado a emplear es de 0,9 litros por hectárea, si el lote tiene 90 hectáreas ¿cuántos litros de herbicida se necesitarían?

Ejercicio N°2:

Las dimensiones de un lote son de $1x10^3$ por $1x10^3$ m o de 1Km por 1 Km, si la cantidad de surcos a sembrar es de 1923 y por cada pasada del tractor se siembran 14 surcos ¿Podrías calcular cuántas veces tiene que pasar el tractor para cubrir todo el lote?

Ejercicio N°3:

¿Cuál es el tiempo que demora en realizar una pasada el tractor del ejercicio anterior si sabemos que este avanza a 4,5 Km/h y la longitud de cada pasada (el largo del lote) es de 1 Km?

Ejercicio N°4:

Un veterinario tiene que inyectar un grupo de 5 terneros, que poseen problemas respiratorios, de 90 Kg de peso vivo cada uno. Para ello inyecta con un antibiótico de la marca Nuflor, las dosis recomendadas son dos con un intervalo de 48 horas y el volumen es de 1 ml por cada 15 Kg de peso vivo. ¿Cuántas dosis tiene que poner el veterinario? Si el frasco viene en una presentación de 100 ml, ¿Cuantos debo comprar?

Ejercicio N°5:

Si tenemos un potrero de 20 metros por 36 metros, y se necesita alambrarlo con 5 hilos ¿Cuantos metros de alambre debemos comprar? Tener en cuenta que el lote tiene una tranquera de 4 metros de largo.

Ejercicio N°6:

Para saber la capacidad de un tanque australiano se aplica la siguiente formula:

$$Volumen\,(lt) = \pi \cdot radio^2 \cdot altura\,del\,agua = \pi \cdot diametro^2 \cdot altura / 4$$

Si queremos tener un tanque con una capacidad de 10.900 litros y un diámetro de 3,74 metros, ¿Qué altura deberá tener?

Ejercicio N°7:

Cuando la mosca de los cuernos comienza a afectar a los vacunos, los veterinarios recomiendan inyectar con una dosis de 10 centímetros cúbicos por cabeza. Si el bidón en el cual viene este antiparásito es de 1,5 litros y se tiene una población de 2149 vacunos ¿Cuantos bidones se tendrán que comprar?

Ejercicio N°8:

En relación al ejercicio anterior; si se gastan 925 cm^3 del antiparásito ¿Cuál es el porcentaje que queda en el bidón?

CAPÍTULO III: EXPRESIONES ALGEBRAICAS, MONOMIOS Y POLINOMIOS.

3.1- EXPRESIONES ALGEBRAICAS

3.1.1- Definición:

Una expresión algebraica es un arreglo en el que números y letras se relacionan por una cantidad finita de operaciones de suma, resta, producto, cociente, potencia y raíz.
El siguiente ejemplo muestra algunos arreglos de números y letras que son expresiones algebraicas:

Ejemplo I

a) $a+\frac{t}{100}$; b) $4b^2-c\,a^3$; c) $\frac{4x^2-3a^2}{7ax}$; d) $b-9a+\sqrt{c+4}$

Cada sumando (o parte) de una expresión algebraica se denomina ***término.***

En el ejemplo I.a) a es el primer término y $\frac{t}{100}$ es el segundo.

En el ejemplo I.b) $4b^2$ es un término y $-c\,a^3$ es el otro.

En el ejemplo I.c) $\frac{4x^2-3a^2}{7ax}$ es el único término que conforma la expresión algebraica.

En el ejemplo I.d) b es el primer término que forma parte de la expresión algebraica, $-9a$ es el segundo término y $\sqrt{c+4}$ es el tercer término que integra parte de la expresión algebraica
.
En síntesis:
"Una expresión algebraica esta formada por uno o varios términos vinculados entre sí por operaciones de suma o resta."

3.1.2- Clasificación:

Las expresiones algebraicas pueden ser de dos tipos:

- Racionales: cuando los términos no están afectados por la radicación, dividiéndose a su vez en:
  - Enteras: cuando las letras están afectadas sólo por operaciones de suma, resta, multiplicación y potencia con exponente entero no negativo.
  - Fraccionarias: cuando algunas de las letras aparecen en algún denominador.
- Irracionales: cuando algunas de las letras están afectadas por la radicación.

Para poder operar con expresiones algebraicas es necesario comprender previamente algunos conceptos básicos.

3.2- MONOMIOS

3.2.1- Definición:

Un monomio es una expresión algebraica formada por un solo término donde las únicas operaciones involucradas son el producto y la potencia de exponente natural.

Ejemplos de monomios: $-4a^2b^4$; $\frac{1}{3}a$; x

Los monomios tienen cuatro partes: ***signo***, ***coeficiente, parte literal*** **y** ***grado***.

El **signo** es el que figura en la parte delantera del monomio, cuando se omite se supone que el monomio tiene signo positivo.

El **coeficiente** hace referencia a la parte numérica del monomio, si no se evidencia ningún coeficiente se supone que es 1.

La **parte literal** esta compuesta por una o varias letras.

El **grado** de un monomio es el exponente (un número natural o cero) al que esta expuesta la parte literal del monomio y puede ser *absoluto* (suma de todos los exponentes) o *relativo* a cada una de las letras.

En la expresión algebraica del ejemplo I.b) ($4b^2 - c\,a^3$) se pueden identificar dos monomios con sus partes constituyentes:

Monomio	Signo	Coeficiente	Parte literal	Grado Absoluto	Grado Relativo
$4b^2$	+	4	b	2	2 (parte literal compuesta por una sola letra).
$-a^3c$	-	1	a^3c	4	3 respecto de la parte literal a. 1 respecto de la parte literal c.

3.2.2- Operaciones con monomios:

- *Suma o Resta:* Para sumar o restar monomios se deben considerar sólo aquellos que tienen la misma parte literal y trabajar (sumar o restar) con los coeficientes de las mismas.
  Por ejemplo:

$$-4ab - 9a^2 + 6ab =$$
$$= -4ab + 6ab - 9a^2 =$$
$$= (-4+6)ab - 9a^2 =$$
$$= 2ab - 9a^2$$

- *Multiplicación:* para multiplicar dos monomios se deben multiplicar los coeficientes por un lado y las partes literales por otro teniendo en cuenta las propiedades de la potenciación.

Por ejemplo:

$$\left(-5a^2y^3\right)\left(-4a^4y^5\right)=$$
$$=(-5)(-4)\left(a^2a^4\right)\left(y^3y^5\right)=$$
$$=20a^6y^8$$

- *División:* se realiza siguiendo la misma lógica que en la multiplicación.
  Por ejemplo:

$$\left(-5a^2y^5\right)\div\left(-4ay^3\right)=$$
$$\frac{\left(-5a^2y^5\right)}{\left(-4ay^3\right)}=$$
$$\frac{-5}{-4}\,\frac{a^2y^5}{ay^3}=$$
$$\frac{-5}{-4}a^2y^5a^{-1}y^{-3}=$$
$$\frac{-5}{-4}a^2a^{-1}y^5y^{-3}=$$
$$\frac{-5}{-4}a\;\;y^2$$

Nota: Hay que aclarar que el resultado de la división de monomios puede ser otro monomio, cuando todos los exponentes son números naturales o cero, o una expresión algebraica cuando algún exponente es negativo.

3.3- <u>POLINOMIOS:</u>

3.3.1- Definición:

Se define como polinomio a una expresión algebraica formada por una colección de números y variables (letras) donde los *exponentes* que aparecen en las variables son números *enteros positivos* (nunca pueden ser fraccionarios ni negativos) y las operaciones involucradas son la suma, la resta, la multiplicación y la potenciación con exponentes naturales.

Son ejemplos de polinomios las siguientes expresiones algebraicas:

I) $4ab^3$ II) $2x^5-5y$ III) $-2x^2+4x^3-y$

Las siguientes expresiones algebraicas NO son polinomios:

I) $\sqrt{x+3}$ II) $x^{-2}+xy$ III) $\frac{2}{x^3}+x^4$

Al polinomio de un solo término lo llamaremos Monomio, al de dos términos lo llamaremos Binomio y al de tres términos Trinomio; así $4ab^3 \Rightarrow$ es un Monomio, $2x^5-5y \Rightarrow$ es un Binomio y $-2x^2+4x^3-y \Rightarrow$ es un Trinomio.

Existen polinomios que solo tienen *una variable*, como por ejemplo: $-2x^4+4x^3-x^2+3x-4$ cuya expresión genérica es:

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_2x^2+a_1x-a_0$$

El *grado* de un polinomio de este tipo viene dado por el mayor exponente al que se encuentra la variable, en el caso del ejemplo anterior decimos que se trata de un polinomio de grado 4.

Si en un polinomio se observan términos que son semejantes conviene agruparlos efectuando la operación indicada (trabajando con las operaciones vistas anteriormente para monomios).

Consideremos el siguiente ejemplo: $2yx^5-5z-6yx^5$ el primer y el tercer término son semejantes por lo tanto podemos rescribirlo como: $2yx^5-6yx^5-5z$ operando algebraicamente se tiene: $(2-6)(yx^5)-5z=-4yx^5-5z$

3.3.2- Operaciones con polinomios:

- *Suma o Resta:* Para sumar o restar polinomios se debe trabajar con los monomios semejantes, es decir aquellos que tengan la misma parte literal, sumando o restando los coeficientes de los mismos.

  Consideremos los siguientes ejemplos:

  I. $(-3b-9ba+2c+4)+(19ba-2b+3c-3)=$
  asociando y conmutando los términos que son semejantes podemos escribir lo siguiente:
  $=(-3b-2b)+(-9ba+19ba)+(2c+3c)+(4-3)=$
  $=(-5b)+(10ba)+(5c)+(1)=$
  $=-5b+10ba+5c+1$

  II. $\left(-5x^2-6xy+2x+4\right)+\left(-3xy-2x+3x^2-7\right)=$
  $=(-5x^2+3x^2)+(-6xy-3xy)+(2x-2x)+(4-7)=$
  $=(-2x^2)+(-9xy)+(0x)+(-3)=$
  $=-2x^2-9xy-3$
  Notar que el término que tiene como parte literal a x ha desaparecido por que la suma de los coeficientes es cero.

Una alternativa que puede resultar más simple para realizar la suma o resta de polinomios es acomodar los polinomios uno debajo del otro donde cada columna tenga únicamente términos semejantes:

III. $\left(4x^2 + y - 6xy^2 + 2x + 1\right) + \left(-3xy^2 + x + 3x^2 - 6\right) =$

$$\begin{array}{l} 4x^2 - 6xy^2 + 2x + 1 + y \\ \underline{3x^2 - 3xy^2 + x - 6} \\ 7x^2 - 9xy^2 + 3x - 5 + y \end{array}$$

Esta forma de trabajo es útil cuando se deben sumar varios polinomios a la vez:

IV. $\left(4z^2 + x - 5zy^2 + 8x + 3\right) + \left(-2zy^2 + 3x + 2z^2 - 6\right) + \left(z^2 + x - zy^2 - 2x\right) =$

$$\begin{array}{l} 4z^2 + x - 5zy^2 + 3 + 8x \\ 2z^2 + 3x - 2zy^2 - 6 \\ \underline{z^2 + x - zy^2 \qquad - 2x} \\ 7z^2 + 5x - 8zy^2 - 3 + 6x \end{array}$$

Notar que también podemos completar aquellos que faltan utilizando un coeficiente igual a cero, para el caso anterior podríamos escribir:

$$\begin{array}{l} 4z^2 + x - 5zy^2 + 3 + 8x \\ 2z^2 + 3x - 2zy^2 - 6 + 0x \\ \underline{z^2 + x - zy^2 + 0 - 2x} \\ 7z^2 + 5x - 8zy^2 - 3 + 6x \end{array}$$

Si tenemos que efectuar una resta de polinomios procederemos del mismo modo que cuando sumamos solo que cambiando los signos del polinomio que se resta, es decir:

V. $\left(20ab - 2a^2 + 3b^2\right) - \left(-2b^2 + 10ab - 5a^2\right) =$

$= \left(20ab - 2a^2 + 3b^2\right) + \left(+2b^2 - 10ab + 5a^2\right) =$

$$\begin{array}{r} 20ab-2a^2+3b^2 \\ -10ab+5a^2+2b^2 \\ \hline 10ab+3a^2+5b^2 \end{array}$$

- *Multiplicación:* El procedimiento que utilizaremos para multiplicar polinomios es el mismo que hemos empleado para realizar la multiplicación de monomios solo que usaremos además la propiedad distributiva, veamos algunos ejemplos:

VI. $(3x-1)(2x+3x^3y-4y^2)=$

si aplicamos la propiedad distributiva se tiene:

$$=(3x)(2x+3x^3y-4y^2)+(-1)(2x+3x^3y-4y^2)=$$

ahora multiplicamos los coeficientes:

$$=(6xx+9xx^3y-12xy^2)+(-2x-3x^3y+4y^2)=$$

a continuación, utilizaremos las propiedades de la potenciación para las partes literales:

$$=(6x^2+9x^4y-12xy^2)+(-2x-3x^3y+4y^2)=$$

por último, efectuamos la suma de los términos semejantes:

$$\begin{array}{l} 6x^2+9x^4y-12xy^2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad -2x-3x^3y+4y^2 \\ \hline 6x^2+9x^4y-12xy^2-2x-3x^3y+4y^2 \end{array} =$$

por lo tanto, se tiene:

$$(3x-1)(2x+3x^3y-4y^2)=6x^2+9x^4y-12xy^2-2x-3x^3y+4y^2$$

Un caso muy importante es cuando tenemos que multiplicar polinomios con la misma parte literal (con una sola variable) solo que elevada a potencias distintas. Consideremos el siguiente ejemplo:

VII. $(2x-4)(3x^3-5x^2-x-1)=$

si aplicamos la propiedad distributiva se tiene:

$$=(2x)(3x^3-5x^2-x-1)+(-4)(3x^3-5x^2-x-1)=$$

$$=(2x3x^3+2x(-5x^2)+2x(-x)+2x(-1))+((-4)3x^3+(-4)(-5x^2)+(-4)(-x)+(-4)(-1))=$$

ahora multiplicamos los coeficientes:

$$(6xx^3-10xx^2-2xx-2x)+(-12x^3+20x^2+4x+4)=$$

a continuación, utilizaremos las propiedades de la potenciación para las partes literales:

$$\left(6x^4-10x^3-2x^2-2x\right)+\left(-12x^3+20x^2+4x+4\right)=$$

por último, efectuamos la suma de los términos semejantes:

$$\begin{array}{r}6x^4-10x^3-\ 2x^2-\ 2x\\ -12x^3+20x^2+4x+4\\ \hline 6x^4-22x^3+18x^2+2x+4\end{array}=$$

por lo tanto se tiene: $(2x-4)\left(3x^3-5x^2-x-1\right)=6x^4-22x^3+18x^2+2x+4$

- *División:* Antes de efectuar la división entre dos polinomios se recordará como obtener el cociente entre dos números enteros:

$$\begin{array}{l|l}3458 & 27\\ \cline{2-2} \underline{27} & 128\\ 75 & \\ \underline{54} & \\ 218 & \\ \overline{2} & \end{array}$$

Verificación: se realiza empleando el ***"Teorema del Resto"***:
"El dividendo (D) debe ser igual al producto entre el cociente (C) y el divisor (d) más el resto (R)"

En el ejemplo anterior se tiene:
Dividendo: D=3458
Cociente: C=128
Divisor: d=27
Resto: R=2
así: $\Rightarrow 3458=27\cdot 128+2$
Realizaremos ahora la división de polinomios que poseen *una sola variable*:

$$=\left(8x^3-4x^2+2x-4\right)\div(x+1)=$$

$$\begin{array}{l|l} 8x^3-4x^2+2x-4 & x+1\\ \cline{2-2} -\underline{8x^3+8x^2} & 8x^2-12x+14\\ 0\quad -12x^2+2x & \\ \quad -\underline{-12x^2-12x-4} & \\ \qquad\quad 0\quad +14x-4 & \\ \qquad\qquad -\underline{+14x+14} & \\ \qquad\qquad\quad 0-18 & \end{array}$$

Verificación: por el ***"Teorema del Resto"***:
Dividendo: D = $8x^3-4x^2+2x-4$
Cociente: C= $8x^2-12x+14$

Divisor: d= $x+1$
Resto: R= -18
así: $\left(8x^3 - 4x^2 + 2x - 4\right) = \left(8x^2 - 12x + 14\right)\left(x+1\right) + \left(-14\right)$

La división de polinomios también puede efectuarse siguiendo una técnica conocida con el nombre de ***"Regla de Ruffini"***, ésta sirve solamente para el caso en que el divisor sea del tipo: $x \pm a$ siendo a cualquier número Real.

La regla se explicará mediante el siguiente ejemplo: $\left(4x^6 + 8x^3 - 2\right) \div \left(x+2\right)$

Lo primero es completar el polinomio utilizando coeficientes igual a cero, es decir debemos partir de un polinomio donde estén escritos ***todos*** sus términos en grado decreciente, por ejemplo para el polinomio: $4x^6 + 8x^3 - 2$ vemos que no esta completo, si lo completamos nos queda: $4x^6 + 0x^5 + 0x^4 + 8x^3 + 0x^2 + 0x - 2$
Una vez completo el polinomio dividendo se cambia el signo de a en nuestro caso sería -2, se ordena y se procede como se muestra a continuación:

	4	0	0	8	0	0	-2
-2		-8	16	-32	48	-96	192
Multiplicamos	4	-8	16	-24	48	-96	190

Para obtener el cociente, que siempre será de un grado inferior al polinomio dividendo, se trabaja con los coeficientes obtenidos anteriormente, es decir.

Cociente $= 3x^5 - 6x^4 + 12x^3 - 16x^2 + 32x - 64$
Resto=126

Verificación:

$$\left(3x^6 + 8x^3 - 2\right) = \left(3x^5 + -6x^4 + 12x^3 - 16x^2 + 32x - 64\right)\left(x+2\right) + \left(126\right)$$

3.3.3- Raíces de polinomios:

Una raíz de un polinomio $P(x)$ es todo número a que hace $P(a) = 0$ siendo ésta un número real o complejo (en este módulo sólo nos moveremos dentro del campo de los números reales no considerando aquellas raíces complejas que tienen una componente imaginaria), en términos generales a las raíces se las designa con las letras x_1, x_2, …., x_n
Para un polinomio de grado *uno* como el siguiente: $P(x) = (2x-4) = 2(x-2)$ por observación directa la raíz será 2.

Para un polinomio de grado *dos* como el siguiente: $P(x) = \left(x^2 + x - 6\right)$ las raíces son: -3 y 2, estas se obtienen expresando el polinomio anterior en forma general como $P(x) = \left(a_2 x^2 + a_1 x + a_0\right)$ = (ax^2 + bx + c), donde $a_2 = 1$, $a_1 = 1$ y $a_0 = -6$ donde luego se aplica:

$$x_1; x_2 = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^{\ 2} - 4a_2 a_0}}{2a_2}$$

$$x_1; x_2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 41(-6)}}{21} = \frac{-1 \pm 5}{2} \quad \Rightarrow \quad x_1; x_2 = \frac{-1 \pm 5}{2} \begin{cases} x_1 = \dfrac{-1+5}{2} = 2 \\ x_2 = \dfrac{-1-5}{2} = -3 \end{cases}$$

Observando las raíces de los dos polinomios anteriores podemos decir que "Todo polinomio $P(x)$ de grado *n* tiene *n* raíces reales o complejas", esta afirmación constituye el ***Teorema Fundamental del Algebra,*** cuya expresión matemática es la siguiente:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x - a_0 = a_n\left[(x - x_1)(x - x_2)\cdot\cdots\cdot(x - x_n)\right]$$

Por ejemplo un polinomio de tercer grado tiene tres raíces:
$P(x) = x^3 + 3x^2 - 4 \Rightarrow P(x) = 1(x+2)(x+2)(x-1)$ en este caso las tres raíces son reales, donde dos están repetidas.
Para encontrar las raíces de polinomios de grado *n* se utiliza un procedimiento denominado factorización.

3.3.4- Factorización de polinomios:

Primero se recordará como factorizar en números primos un número real, para el número 150 se tiene:

150	2
75	3
25	5
5	5
1	

Es decir que: 150 = 2 3 5 5

Se llama ***factorización*** al procedimiento por el cual podemos transformar una suma o resta algebraica en un producto.
Antes de trabajar con expresiones algebraicas complejas, se deben considerar distintos casos, conocidos como *casos de factoreo*:

- *Factor común:* Un factor es un coeficiente (número) o una parte literal (letra) que se repite en varios o en todos los términos de un polinomio.
  Ejemplos:

I. $2+4+6=2\;1+2\;2+2\;3=2\;(1+2+3)$

II. $3x^3+x^2-x=x\left(3x^2+x-1\right)$

III. $3x^4+9x^2-6x=3x\left(x^3+3x-2\right)$

IV. $8x^6+6x^5-2x+4=2x\left(4x^5+3x^4-1\right)+4$

- *Factor común por grupo:* En este caso debemos agrupar términos donde se observen factores en común en forma separada.
  Ejemplos:
  V. $2x\left(4x^5+3x^4-1\right)+4=2\left(x\left(4x^5+3x^4-1\right)+2\right)$
  VI. $3x^3-3x^2+2x-2=3x^2(x-1)+2(x-1)=(x-1)\left(3x^2+2\right)$

- *Trinomio Cuadrado:* Cuando tengamos un polinomio con un término cuadrático, otro lineal y otro independiente podemos factorizarlo siempre y cuando sus raíces sean reales.
  Recordemos que: $(x-3)^2=(x-3)(x-3)=x^2+2x(-3)+9=x^2-6x+9$
  Ejemplos:
  VII. $x^2+x-6=(x-2)(x+3)$

  Donde sus raíces vienen dadas por:

$$x_1;x_2=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\;1\;(-6)}}{2\;1}=\frac{-1\pm5}{2}\Rightarrow \qquad x_1;x_2=\frac{-1\pm5}{2}$$

$$x_1=\frac{-1+5}{2}=2$$

$$x_2=\frac{-1-5}{2}=-3$$

  VIII. $9x^2+12x+4=9\left(x+\frac{2}{3}\right)\left(x+\frac{2}{3}\right)$

- *Diferencia de Cuadrado:* Cuando un polinomio está constituido por una resta de dos términos donde cada uno de ellos está elevado al cuadrado, se puede factorizar de la siguiente forma: $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$
  Ejemplos:
  IX. $x^2-16=x^2-4^2=(x-4)(x+4)$

  X. $x^2-3=x^2-\left(\sqrt{3}\right)^2=\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)$

- *Aplicación de la Regla de Ruffini:* Si se tiene un polinomio de grado tres o mayor podemos proponer una posible raíz, que será verificada mediante la utilización de la regla de ruffini, si al aplicar la regla el resto da cero entonces la raíz propuesta es efectivamente una raíz del polinomio.
  Ejemplos:

XI. Para el polinomio $4x^6 + 8x^3 - 2$ si lo evaluamos en -2 observamos que el polinomio da como resultado cero, por Ruffini se tiene:

	4	0	0	8	0	0	-2
-2		-8	16	-32	48	-96	192
Multiplicamos	4	-8	16	-24	48	-96	190

Por lo tanto al polinomio lo podemos reescribir de la siguiente manera $4x^6 + 8x^3 - 2 = \left(4x^5 - 8x^4 + 16x^3 - 24x^2 + 48x - 96\right)\left(x + 2\right) + 190$

3.4- EXPRESIONES ALGEBRAICAS FRACCIONARIAS:

3.4.1- Definición:

Dados los polinomios *A(x)* y *B(x)* de orden *n* y con *B(x)* $\neq$ *0*, entonces definimos como expresión algebraica fraccionaria al cociente o razón entre estos: $Q(x) = \dfrac{A(x)}{B(x)}$

Donde $Q(x)$ es una **expresión algebraica fraccionaria o expresión racional polinómica**.

Son ejemplos de expresiones algebraicas fraccionarias las siguientes:

$Q(x) = \dfrac{3(x-2)}{x^2 - 4x + 4}$; $P(x) = \dfrac{x^4 - 1}{2x - 2}$; $R(x) = \dfrac{x^2 - 9}{2x - 5}$; $S(x) = \dfrac{x - 1}{-3x^2 + 5}$

Antes de operar con expresiones algebraicas fraccionarias es importante analizar como, en algunos casos, éstas pueden ser simplificadas con la finalidad de obtener una expresión más reducida.

3.4.2- Simplificación de expresiones algebraicas fraccionarias:

Es necesario dejar absolutamente claro que *no todas* las expresiones algebraicas pueden simplicarse, por ejemplo las expresiones $Q(x)$ y $P(x)$ sí pueden reducirse, en cambio las expresiones $R(x)$ y $S(x)$ no pueden simplificarse.

Para poder simplificar una expresión algebraica debemos como primer paso hacer uso de los casos de factorización ya estudiados y/o encontrar las raíces del numerador y del denominador para luego eliminar los factores comunes de ambos polinomios, es decir simplificar.

Ejemplos:

I. $Q(x)=\dfrac{x^4-1}{2x-2}=\dfrac{(x^2+1)(x^2-1)}{2(x-1)}=\dfrac{(x^2+1)(x-1)(x+1)}{2(x-1)}=\dfrac{(x^2+1)(x+1)}{2}$

II. $Q(x)=\dfrac{x^2+2x+1}{x^3+1}=\dfrac{(x+1)^2}{(x^2-x+1)(x+1)}=\dfrac{(x+1)}{x^2-x+1}$

3.4.3- Operaciones con expresiones algebraicas fraccionarias:

- *Suma y resta de expresiones algebraicas fraccionarias*: La suma o resta de expresiones algebraicas fraccionadas se realiza de igual manera que la suma o la resta de números fraccionarios, recordemos esto último:

$$\frac{5}{2}+\frac{3}{7}=\frac{5\ 7+2\ 3}{2\ 7}=\frac{35+6}{14}=\frac{41}{14}$$

Ejemplo:

III. $\dfrac{P(x)}{S(x)}+\dfrac{T(x)}{V(x)}=\dfrac{x+2}{1-x^2}+\dfrac{1}{2-x}=\dfrac{x+2}{(1-x)(1+x)}+\dfrac{1}{2-x}=\dfrac{(x+2)(2-x)+1(1-x^2)}{(1-x)(1+x)(2-x)}$

$$=\frac{-x^2+4+1-x^2}{(1-x)(1+x)(2-x)}=\frac{-2x^2+5}{x^3-2x^2-x+2}$$

Observación: La última fracción es irreductible, en caso de no serlo se debe factorizar para poder simplificar y obtener una expresión irreductible.

Ejemplo:

IV. $\dfrac{P(x)}{S(x)}-\dfrac{T(x)}{V(x)}=\dfrac{3x+6}{4-x^2}-\dfrac{6}{9-3x}=$ Antes de realizar la resta podemos factorizar cada uno de sus términos para reducirlos y que la operación sea más sencilla:

$$=\frac{3\cancel{(x+2)}}{\cancel{(2+x)}(2-x)}-\frac{\cancel{3}\,2}{\cancel{3}(3-x)}=$$

$$=\frac{3}{(2-x)}-\frac{2}{(3-x)}=\frac{3(3-x)-(2-x)2}{(2-x)(3-x)}=\frac{(9-3x)-(4-2x)}{(2-x)(3-x)}=\frac{5-x}{x^2-5x+6}$$

- *Producto de expresiones algebraicas fraccionarias:* Definimos el producto de expresiones algebraicas fraccionarias a la expresión algebraica fraccionaria cuyo denominador es el producto de los numeradores de las fracciones dadas y cuyo denominador es el producto de los denominadores de los mismos.

  Ejemplo:

V. $\frac{P(x)}{S(x)}\frac{T(x)}{V(x)}=\frac{P(x)\,T(x)}{S(x)\,V(x)}=\frac{5x+2}{x-1}\,\frac{2x-3}{x+1}=\frac{(5x+2)\,(2x-3)}{(x-1)\,(x+1)}=$

$=\frac{10x^2-15x+4x-6}{(x-1)(x+1)}=\frac{10x^2-11x-6}{(x-1)(x+1)}$

- *Cociente de expresiones algebraicas fraccionarias:* Dadas dos expresiones algebraicas se define el cociente entre las mismas de la siguiente manera:
  $\frac{P(x)}{S(x)}\div\frac{T(x)}{V(x)}=\frac{P(x)}{S(x)}\left(\frac{T(x)}{V(x)}\right)^{-1}=\frac{P(x)}{S(x)}\frac{V(x)}{T(x)}$, o lo que es lo mismo, multiplicando a la primera fracción por la inversa de la segunda fracción. Ejemplo:

VI. $\frac{Q(x)}{P(x)}\div\frac{R(x)}{V(x)}=\frac{Q(x)}{P(x)}\,\frac{V(x)}{R(x)}=\frac{Q(x)V(x)}{P(x)R(x)}$

$=\frac{x+8}{x-3}\div\frac{2x-5}{x+1}=\frac{x+8}{x-3}\,\frac{x+1}{2x-5}=\frac{(x+8)(x+1)}{(x-3)(2x-5)}=\frac{x^2+9x+8}{2x^2-11x+15}$

3.5- EJERCICIOS:

Ejercicio Nº 1:

Indique cuales de las siguientes expresiones algebraicas son monomios, especificando cuando corresponda signo, coeficiente, parte literal, grado absoluto y grado relativo.

a) $-2x^2-9xz-36$	d) $-18x^3y$	g) $\frac{-18x^{-2}y^4}{2}$	j) $45zx^3$
b) $-8xy$	e) $-a^3b^8$	h) $-7x^3$	k) $\frac{3z^3y^6}{4}$
c) $2xz^2$	f) $-2{,}5x^3z^2$	i) $9{,}3z^4y$	l) $-\frac{3\sqrt{z^{16}y^9}}{4}$

Ejercicio Nº 2:

Resuelva las siguientes sumas y restas de monomios:

a) $-2x^2-9x-3+4x^2-5=$	d) $z^{16}y-z^{16}-3z^{16}y=$
b) $-8xy-6xy-x+2y^3=$	e) $\frac{3z^3y^6}{4}+z^3y^6+z=$
c) $2xz^2-6x+5xz-2xz^2-4x+xz=$	f) $-2a^3-9b-3+4a^2-5=$

Ejercicio Nº 3:

Resuelva las siguientes multiplicaciones de monomios:

a) $\left(-2x^2\right)\left(-2x^2\right)=$	b) $\left(-3xyz\right)\left(2x^3y^5z^4\right)=$	c) $\left(2x^3y^6\right)\left(x^4y^5z^4\right)=$

Ejercicio Nº 4:
Efectúe las siguientes divisiones de monomios:

a) $\left(-2x^4\right)\div\left(2x^2\right)=$	b) $\left(x^8y^5\right)\div\left(2x^3y^5\right)=$	c) $\left(7x^9y^4z^2\right)\left(x^4y^5z^4\right)=$

Ejercicio Nº 5:
Resuelva las siguientes sumas y restas de polinomios:

a) $\left(-2x^2-9x^4\right)+\left(5+4x^2-5y\right)=$	d) $\left(z^6x-z^{16}\right)-\left(3z^{16}\right)=$
b) $\left(xy^2-6xy\right)-\left(-xy^2+2y^3\right)=$	e) $\left(\dfrac{3z^3y^6}{4}\right)-\left(z^3y^6\right)-\left(z^3y^2\right)=$
c) $\left(-3xz^2-6z-2xz\right)-\left(2xz^2-4z+xz\right)=$	f) $\left(a^4-9b^2-3\right)+\left(4a^4-5\right)=$

Ejercicio Nº 6:
Resuelva las siguientes multiplicaciones de polinomios:

a) $\left(3x^2-5x^4\right)\left(-3+4x^2\right)=$	d) $\left(x^6y-4\right)\left(3x^2\right)\cdot\left(x+y\right)=$
b) $\left(x^2-6\right)\left(x^2-6\right)=$	e) $\left(\dfrac{2y^6}{5}\right)\left(-2y^6\right)=$
c) $\left(-3z^2-6zx\right)\left(2xz-4z^2+xz\right)=$	f) $\left(x^2-9x-3\right)\left(4x^2-5x+1\right)=$

Ejercicio Nº 7:
Resuelva las siguientes divisiones de polinomios y verifique:

a) $\left(3x^5-5x^4+3x^3-2x^2+x-1\right)\div\left(4x^2+2\right)=$	d) $\left(y^6+35y^4-4\right)\div\left(5y^2-1\right)=$
b) $\left(x^6-6x-6\right)\div\left(x^2-6\right)=$	e) $\left(2x^4+x^3-3x^2-x+6\right)\div\left(-2x^2+1\right)=$
c) $\left(-3z^2-z+3\right)\div\left(2z-4\right)=$	f) $\left(x^3-9x-3\right)\div\left(4x^2-5x\right)=$

Ejercicio Nº 8:
Simplifique cada una de las siguientes expresiones algebraicas:

a) $\dfrac{x^2+x-6}{x^2-9}$	b) $\dfrac{2x^2-2x+4x-4}{7x^2+14x-7-14}$

c) $\dfrac{x^4-5x^3-7x^2+29x+30}{x^3-6x^2+3x+10}$	d) $\dfrac{x^3+x^2-3x-3}{x^2+x-\sqrt{3}\,x-\sqrt{3}}$
e) $\dfrac{x^5-16x+2x^4-32}{x^2-4}$	f) $\dfrac{x^5+x^4-3x^2-2x^2+x}{x^2+x}$

Ejercicio Nº 9:

Resuelva las siguientes operaciones entre expresiones algebraicas simplificando cuando sea posible:

a) $\dfrac{x^2-9}{x+3}+\dfrac{-9}{x-3}$	b) $\dfrac{x^3-3x+4x^2-12}{x^2-2x-8}-\dfrac{x^2+6x+5}{x^2+3x-10}$
c) $\dfrac{x^4-x^3-x+1}{x^2-1}+\dfrac{x^2-1}{x-1}$	d) $\dfrac{x^2-2x-15}{x-3}\,\dfrac{x^2+x-12}{x^2-3x-10}$
e) $\dfrac{x^3-5x^2-3+15}{x+3}\div\dfrac{x^2-6x+10}{x^2+4x+3}$	

Ejercicio Nº 10:

Llevar a la mínima expresión:

a) $\left(\dfrac{6xy+8x^2+15y+20x}{9x^3y+12x^4}-\dfrac{9-a^2}{-3ax^3+9x^3}\right)3x^3$
b) $\dfrac{x^4-y^4}{(x-y)^2}\,\dfrac{y^2}{x^2+y^2}\,\dfrac{x-y}{xy+y^2}$
c) $\dfrac{y^2-2y-15}{y^2-9}\div\dfrac{12-4y}{y^2-6y+9}$

CAPÍTULO IV:ECUACIONES

4.1- EL MISTERIO DE LAS ECUACIONES:

Antes de hablar de ecuaciones necesitamos identificar el concepto de igualdad.

Llamamos igualdad a elementos que tienen el mismo significado, como podemos ver en los siguientes ejemplos:

$3+2=-5-10\cdot(-1)=9-4$

En cada igualdad hay *2 miembros separados* por el signo **=**

- *Primer miembro: en el primer ejemplo es 3 + 2; en el segundo,* $-5-10\cdot(-1)$
- *Segundo miembro: en el segundo, 9 - 4.*

Ahora que conocemos las igualdades, podremos desarrollar el concepto de ecuación.

4.2- DEFINICIÓN:

La forma que tenemos de enunciar que dos cantidades o expresiones son iguales es mediante una ecuación (o igualdad). Podemos entonces definir a las ecuaciones como una igualdad entre expresiones algebraicas (sucesión de términos constituidos de números y letras, cada término es separado del otro por un signo "+" ó "-"), en la que intervienen una o más letras llamadas incógnitas (cuyo valor/es hay que averiguar). Las expresiones que están a ambos lados del signo igual son los miembros de la ecuación: primer miembro el de la izquierda, segundo miembro el de la derecha. Los métodos para resolver ecuaciones datan de los tiempos de los babilonios (2000 a.C.). Se denomina solución de una ecuación a un valor o conjunto de valores de la incógnita (**x**), para los cuales se verifica la igualdad

Por ej. $2x - 3 = x + 5$ que se denomina ***ecuación en x***

Por ejemplo:

$$5 + x = 12$$

La ***x*** representa al número que sumado con 5 tiene como suma al 12. Para saber cuál es el término que falta, en este caso aplicamos la *operación inversa: sustracción*.

$x = 12 - 5$ $\qquad\qquad$ $x = 7$

En esta ecuación el valor de x es 7, porque
$5 + 7 = 12$.

- Observamos que este enunciado tiene dos partes o expresiones separadas por el signo **=**, una en el lado izquierdo *(LI)*, y otra en el lado derecho *(LD)*.
- Es una expresión de igualdad con una variable, la ***x***.
- La solución, o raíz, de la ecuación es un número ***a*** que produce una expresión cierta al sustituirlo por la ***x***, es decir ***a*** satisface la ecuación.
- Llamamos ecuaciones equivalentes a un conjunto de ecuaciones que tienen exactamente las mismas soluciones.

- Resolver una ecuación consiste en hallar todas las soluciones de dicha ecuación.
- Una ecuación algebraica en ***x*** contiene sólo expresiones algebraicas como polinomios, expresiones racionales, radicales y otras.
- Si todo número de los dominios de las expresiones de una ecuación algebraica es una solución, la ecuación se denomina identidad, por ej. $x^2+2x+1 = (x+1)^2$.

  Si hay números que no sean solución, la expresión se llama simplemente

  ecuación, por ej. $5x-10 = 2x+8$
- Dos ecuaciones se llaman equivalentes si tienen las mismas soluciones o ambas carecen de solución. Así, la ecuación $3x – 7 = x + 1$ es equivalente a $2x – 8 = 0$ porque ambas tienen como solución única $x = 4$.

4.3- <u>RESOLUCIÓN DE ECUACIONES:</u>

Resolver una ecuación es hallar su solución (soluciones), o podemos llegar a la conclusión que no tiene solución. Para resolver una ecuación, se pasa a otra equivalente cuya apariencia sea más sencilla. Para averiguar el valor de x debe despejarse la letra incógnita. Para ello nos valemos de una propiedad matemática (propiedad uniforme) que nos permite poner un mismo número en ambos miembros de la expresión algebraica, siempre y cuando se mantenga la igualdad.

Sin embargo, hay tipos de ecuaciones para cuya resolución se requieren técnicas especiales. Es el caso, por ejemplo, de las ecuaciones cuadráticas.

¨Generalmente, para resolver ecuaciones, elaboramos una lista de ecuaciones equivalentes (cada una más sencilla que la precedente), terminando con una ecuación cuya solución podemos hallar con facilidad¨.

¿Qué podemos hacer para resolver una ecuación?

- Podemos sumar o restar la misma expresión en ambos lados de la ecuación.
- Podemos multiplicar o dividir ambos lados de una ecuación por una expresión que representa un número real distinto de cero.
- Si hay, eliminamos todos los niveles de paréntesis que aparezcan comenzando por el más interno, resolviendo las operaciones indicadas.
- Si hay, eliminamos todos los denominadores multiplicando por el **m.c.m**.(*de los denominadores*) ambos lados de la ecuación.
- Agrupamos las expresiones con la variable en un lado (generalmente el izquierdo) y las expresiones numéricas en el otro lado.
- Despejamos la incógnita, obteniendo así la solución.
- Comprobamos si la solución satisface la ecuación propuesta, es decir si aparece una identidad verdadera.
- Si una ecuación contiene expresiones racionales, a menudo eliminamos denominadores multiplicando ambos lados por el *m.c.m.* de estas expresiones. Si

multiplicamos ambos lados por una expresión que es igual a cero para algún valor de ***x***, quizá la ecuación resultante no equivalga a la original.

En síntesis:
- Eliminamos paréntesis. - Eliminamos denominadores. - Agrupamos términos semejantes. - Despejamos la incógnita. - Comprobamos la solución.

<u>Ejemplo 1:</u>

$$6x-7=2x+5$$
$$6x-2x=5+7$$
$$4x=12$$
$$x=\frac{12}{4}$$
$$x=3$$

<u>Ejemplo 2:</u>

$$(8x-2)(3x+4)=(4x+3)(6x-3)$$
$$24x^2+32x-6x-8=$$
$$24x^2-12x+18x-9$$
$$26x-6x=-9+8$$
$$20x=-1$$
$$x=\frac{-1}{20}$$

<u>Ejemplo 3:</u>

$$\frac{3x}{x-2}=1+\frac{6}{x-2}$$
$$\frac{3x}{x-2}(x-2)=1\cdot(x-2)+\frac{6}{x-2}(x-2)$$
3 $$3x=(x-2)+6$$
$$2x=4$$
$$x=2\rightarrow No\ valida$$

¡¡¡cuidado!!!!!!

No se permite la división por cero, x=2 una solución, por tanto la ecuación dada n solución.

<u>Ejemplo 4:</u>

$$\frac{3}{2x-4}-\frac{5}{x+3}=\frac{2}{x-2}=$$
$$=\frac{3(x+3)-5(2x-4)}{(2x-4)(x+3)}=\frac{2}{x-2}$$
$$=\frac{3x+9-10x+20}{(2x-4)(x+3)}=\frac{2}{x-2}$$
$$=-7x+29=\frac{2(2x-4)(x+3)}{x-2}=$$
$$=-7x+29=\frac{2\,(x-2)(x+3)2}{(x-2)}=$$
$$=-7x+29=4(x+3)=$$
$$=-7x+29=4x+12=$$
$$-11\cdot x=-17=$$
$$x=\frac{17}{11}$$

El m.c.m. es (2x-4)(x+3), luego los núme -3 si aparecen en la solución no serían v pero no es el caso.

4.4- TIPOS DE ECUACIONES:

Las ecuaciones con una incógnita suelen tener un número finito de soluciones, mientras que en las ecuaciones con varias incógnitas encontramos infinitas soluciones, las que suelen ser estudiadas cuando forman sistemas de ecuaciones.

A las *ecuaciones polinómicas* de primer grado, **ax + b = 0**, se las llama **lineales**.

5x + 7 = 3 (es lineal).

$(x - 5)^2 + 3 = x^2 - 1$ (No hay que dejarse engañar por las apariencias, esta ecuación también es lineal. Al desarrollar y simplificar se obtiene: $-10x + 29 = 0$).

A las *ecuaciones polinómicas de segundo grado* que responden a la estructura: $ax^2 + bx + c = 0$, se las denominan cuadráticas. Son ecuaciones de este tipo: x^2+5x+3, ó (x – 2)2 + 7x =5 + x. (En este caso, se despeja **x** de manera que al final queda una ecuación cuadrática, o sea, un polinomio de grado dos).

Las *ecuaciones radicales* son aquellas en las que la incógnita está bajo un signo radical, como, por ejemplo:

$$\sqrt{2 \cdot x - 1} = 3$$

Las *ecuaciones racionales* son ecuaciones en las que aparecen cocientes de polinomios; por ejemplo:

$$\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+1} = \frac{5}{x^2 - 1}$$

En las *ecuaciones exponenciales* la incógnita está en un exponente: $2^x = 8$

En las *ecuaciones logarítmica* (inversa de las de tipo exponencial) la incógnita se encuentra afectada por el logaritmo, acordarse que la solución debe estar de acuerdo con el dominio de la función logarítmica): Log (x + 1) = 10.

4.5- SISTEMA DE ECUACIONES:

Conjunto de ecuaciones cuyas soluciones comunes se pretende hallar. Para indicar que varias ecuaciones forman un sistema, se abarca el conjunto de todas ellas con una llave.

Sistemas de Ecuaciones Lineales:

Una ecuación con varias incógnitas es lineal si es de la forma:

$ax + by = c$, $ax + by + cz = d, \ldots$, es decir, si las incógnitas aparecen elevadas a la potencia 1 (sin exponentes).

Un sistema de ecuaciones lineales compatible o bien tiene solución única (es determinado), o tiene infinitas soluciones (es indeterminado).

Existen varios métodos elementales para resolver sistemas de ecuaciones: el método de sustitución, el método de igualación y el método de reducción. A continuación, se aplican en la resolución de sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas.

El método de sustitución consiste en despejar una de las incógnitas en una de las ecuaciones y sustituir su expresión en la otra, la cual se transformará en una ecuación con una incógnita que se puede resolver. Una vez conocido el valor de dicha incógnita se obtiene, de inmediato, el valor de la otra.

Para resolver el sistema

$$\begin{cases} 2x-5y=16 \\ 4x+y=10 \end{cases}$$

por el **método de sustitución** conviene despejar la **y** de la segunda ecuación:

$y=10-4x$ y ahora se sustituye su valor en la primera, es decir: $2x-5(10-4x)=16$

Se resuelve la ecuación resultante, pues sólo tiene una incógnita:

$$2x-50+20x=16 \Rightarrow 22x=66 \Rightarrow x={}^{66}\!/_{22} \Rightarrow x=3$$

Ahora el valor de x se sustituye en la expresión de y obtenida antes:

$$y = 10 – 4x = 10 – 4\ 3 = 10 – 12 = – 2$$

Se ha obtenido así la solución **x = 3**, **y = – 2**.

El **método de igualación** consiste en despejar la misma incógnita en las dos ecuaciones e igualar sus expresiones, obteniendo así una ecuación con una incógnita. Una vez resuelta se obtiene fácilmente el valor de la otra incógnita.

Para resolver por igualación el sistema anterior, se puede despejar **x** ó **y** en ambas ecuaciones e igualar sus expresiones:

(despejamos **x** en cada una de las expresiones para igualarlas y de esa manera poder hallar el valor de **y**)

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{16+5y}{2} \\ x&=\frac{10-y}{4} \end{aligned}\right\} \frac{16+5y}{2}=\frac{10-y}{4} \Rightarrow 4(16+5y)=2(10-y) \Rightarrow 64+20y=20-2y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 20y+2y=20-64 \Rightarrow 22y=-44 \Rightarrow y={}^{-44}\!/_{22} \Rightarrow y=-2$$

Por último, se sustituye el valor de **y** en alguna de las expresiones de **x** y se obtiene la solución: x = 3, y = – 2.

El **método de reducción** consiste en procurar que una de las incógnitas tenga el mismo coeficiente en las dos ecuaciones para que, al restarlas miembro a miembro, se elimine dicha incógnita, dando lugar a una ecuación con sólo la otra incógnita. Se resuelve dicha ecuación y el valor de la incógnita se sustituye en una de las ecuaciones primitivas, y con ello se puede obtener el valor de la otra incógnita.

*4.6- **RESOLUCIÓN DE ECUACIONES RACIONALES:***

En este caso tenemos "fracciones" con polinomios. Se recomienda factorizar siempre el denominador para poder buscar el denominador común y reducir la operación a un polinomio (generalmente de primer o segundo grado) al que se lo resuelve como una ecuación común.

Pongamos un ejemplo:

$$\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x+1}=\frac{5}{x^2-1}$$

Factorizando:

Como no se repite ningún binomio en la suma, tomamos ambos como *"común denominador"*. Se opera igual que en una suma de fracciones, se divide $(x-1)\cdot(x+1)$ por cada uno de los denominadores y el resultado se lo multiplica por el numerador.

Se simplifican los denominadores quedando una ecuación lineal.

Se despeja **x**.

$$\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x+1}=\frac{5}{x^2-1}$$

$$\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x+1}=\frac{5}{(x-1)\ (x+1)}$$

$$\frac{1\ (x+1)+2\ (x-1)}{\cancel{(x-1)\ (x+1)}}=\frac{5}{\cancel{(x-1)\ (x+1)}}$$

$$(x+1)+2\ (x-1)=5$$

$$x+1+2\ x-2=5$$

$$3\,x\ =5-1+2$$

$$3\,x\ =6$$

$$x=6/3$$

$$x=2$$

*4.7- **EJERCICIOS DE APLICACIÓN***

Ejercicio Nº 1: Hallar el conjunto solución de las siguientes ecuaciones lineales.3x + 2 = 7

a) x + 3 = x + 3
b) – x + 5 = 0
c) x + 7 – 3.x = 2x +1
d) x + 3 – 5 = x
e) 5x = 6

Ejercicio N° 2: Hallar el conjunto solución de las siguientes ecuaciones lineales.

a) $6x+5=11$

b) $2x+8=2x+8$

c) $-x+5=3x-8$

d) $5x+9-3x=2x$

e) $7x+3x-5=x+1$

f) $6x+3=6-6x$

g) $4r-1=3r+3$

h) $5i+2=4i+3$

i) $10x+18=18x-54$

Ejercicio N° 3: Hallar el conjunto solución de las siguientes ecuaciones cuadráticas.

a) $16x^2-8x+1=0$

b) $2x^2+3.x-2=0$

c) $3x^2+14=2x^2+30$

d) $11x^2-5x-3=2x^2-11x-4$

e) $x^2+3.x=0$

f) $2x^2-3x+3=0$

g) $0=-\frac{1}{2}\left(x+\frac{5}{2}\right)(x-4)$

h) $2x^2+4=6x$

i) $0=(x-4)^2-1$

j) $-3x^2+12=0$

k) $-3=x^2+4x$

Ejercicio Nº 4: Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{4.x-2}{5}=x+3$

b) $\frac{3(x-2)}{5}=4x-1$

c) $\frac{x-2}{3}=\frac{2x-5}{4}$

d) $2-\frac{x-3}{4}=3(x-5)$

e) $\frac{x-3}{4}-1=2x+3$

f) $\frac{x}{4}+\frac{x}{3}-\frac{x}{2}+1=2$

g) $\frac{2x}{3}-\frac{x-1}{4}=1$

h) $\frac{3x-1}{4}+\frac{2x+3}{2}=5$

i) $\frac{2x-4}{5}-\frac{x-1}{6}=\frac{x-3}{2}-1$

j) $\frac{2}{x-5}=\frac{4}{3x+7}$

k) $\frac{1}{2x-6}=\frac{1}{2}-5$

l) $\frac{3}{1+x}-\frac{x^2+1}{1-x^2}+\frac{x+1}{1-x}=0$

m) $\frac{2x-1}{2x+1}-\frac{10}{4x^2-1}=\frac{1+2x}{1-2x}$

Ejercicio Nº 5: Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $2-\frac{x-3}{41}=3(x-5)^2-4x$

b) $\frac{2}{3}x+4-\frac{x-1}{4}=10$

c) $x-\frac{1}{3}=x-\frac{3x+5}{2}-\frac{x-1}{3}$

d) $\frac{2-3(x-4)}{5}=\frac{2(x-1)}{3}$

e) $\frac{3x}{4}+\frac{x}{3}-\frac{x+2}{2}+1=25$

f) $\left(x+\frac{3}{4}\right)^2=x^2-3x+\left(16\sqrt{\pi}\right)^0$

g) $\frac{x+3}{-4}+\frac{4}{5}-\frac{3}{6}x=\frac{2}{3}\left(x-\frac{9x}{2}\right)$

h) $\frac{x-2}{3x}=\frac{2x-5}{4}+x^{-1}$

i) $\frac{2x}{3x}-\frac{x-1}{4}=12x$

j) $\frac{3x-2}{4}+\frac{4\cdot x+3}{2}=5x$

k) $\frac{2\cdot x-14}{5}-\frac{x-1}{6}=\frac{x-3}{-2}-3$

l) $\frac{2x}{x-5}=\frac{-4}{3\cdot x+7}$

m) $\frac{-1}{2\cdot x-6}=\frac{1}{7}-5x$

n) $\frac{2}{1+x}-\frac{x^2+1}{1-x^2}-\frac{x+1}{1-x}=1$

o) $\frac{2\cdot(2\cdot x-1)}{2\cdot x+1}-\frac{1}{4\cdot x^2-1}=\frac{1+2\cdot x}{1-2\cdot x}$

p) $\frac{x-3}{2}-(1)^0=2\cdot x+3x$

q) $\left(1+\frac{4}{7}\cdot x^7+89\cdot x^6+5\cdot x^5\right)^0+x=1$

r) $\frac{x}{4}-3\cdot\left(\frac{x+4}{5}\right)=\frac{2}{8}\cdot(x+3)$

s) $\sqrt[4]{x^4}+\frac{x}{3}=\sqrt{x^2}-x$

t) $\left(\sqrt{x+4}\right)^3+2=3$

u) $x^2+3=4$

v) $\left(x^3+1\right)^3=0$

Ejercicio N° 6: Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{2-3(x-4)}{5}=\frac{2(x-1)}{3}$

b) $\frac{3}{4}(x-1)=\frac{2}{3}(2x+5)-1$

c) $(x)^{1/2}\ \sqrt[3]{x^6}=\frac{16}{x}$

d) $\frac{x+2}{x-3}=\frac{3x-4}{x+2}$

e) $x^3\left(-x+\frac{1}{2}\right)=x^4$

f) $\frac{r+2}{r}=\frac{4}{5}$

g) $\frac{r-3}{2}+\frac{4r-6}{7}=\frac{4r-5}{r}$

h) $n-\frac{n}{2}=7$

i) $\frac{1}{x}+\frac{8x}{9}=x$

j) $\frac{2x-1}{2x+1}-\frac{10}{4x^2-1}=\frac{1+2x}{1-2x}$

k) $\frac{8}{x}+6=10$

l) $0{,}8r+7{,}25=-2{,}3r^2$

m) $\frac{e}{2}+\frac{3e}{4}=15+\frac{5e}{6}$

Ejercicio N° 7: Hallar el conjunto solución de las siguientes ecuaciones cuadráticas.

a) $16x^2 - 8x + 1 = 0$
b) $2x^2 + 3.x - 2 = 0$
c) $3x^2 + 14 = 2x^2 + 30$
d) $11x^2 - 5x - 3 = 2x^2 - 11x - 4$
e) $x^2 + 3.x = 0$
f) $2x^2 - 3x + 3 = 0$
g) $0 = -\frac{1}{2}\left(x + \frac{5}{2}\right)(x - 4)$
h) $2x^2 + 4 = 6x$
i) $0 = (x-4)^2 - 1$
j) $-3x^2 + 12 = 0$
k) $-3 = x^2 + 4x$

Ejercicio N° 8: Resolver las siguientes ecuaciones fraccionarias:

a) $\frac{3}{x-2} + \frac{2}{x-3} = \frac{2}{x-4}$
b) $\frac{2x-2}{x-3} = \frac{x+2}{x-4}$
c) $\frac{x+1}{x+3} + \frac{x-3}{x-1} = \frac{5}{4}$
d) $\frac{x}{6} + \frac{6}{x} = 6$
e) $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 + \frac{x+1}{x-1} - 6 = 0$
f) $\frac{3.x}{2x+1} = \frac{x+5}{x+1} + \frac{x-19}{2x^2+3x+1}$
g) $\frac{5}{(x+1)^2} + \frac{4}{x+1} = 1$
h) $\left(\frac{\sqrt{x^2+7}}{2} + 1\right)^2 = 9$
i) $\left(\frac{\sqrt[3]{x^2+23}}{3} + 1\right)^3 = 8$

Ejercicio N° 9: Hallar el valor de *x*:

a) $\sqrt{2+\sqrt{x-4}}=\sqrt{12-x}$

b) $\sqrt{x}=x-6$

c) $\sqrt[3]{x^2+20.x}-5=0$

d) $\sqrt{5x+4}=8$

e) $\sqrt{x^2-2}=38$

f) $\sqrt[3]{x^3+27}=3$

Ejercicio N° 10: Factorizar las siguientes ecuaciones de segundo grado.

a) $x^2-81=0$

b) $2x^2+4x-16=x^2-20$

c) $x^2+5x-14=0$

d) $x^2-\frac{1}{3}=0$

e) $x^2-2x-15=0$

f) $x^2+6x=16$

g) $3x^2-2x-6=0$

h) $2x^2+8x-12=0$

i) $x^2=-8x-35$

Ejercicio Nº 11: Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones y graficar:

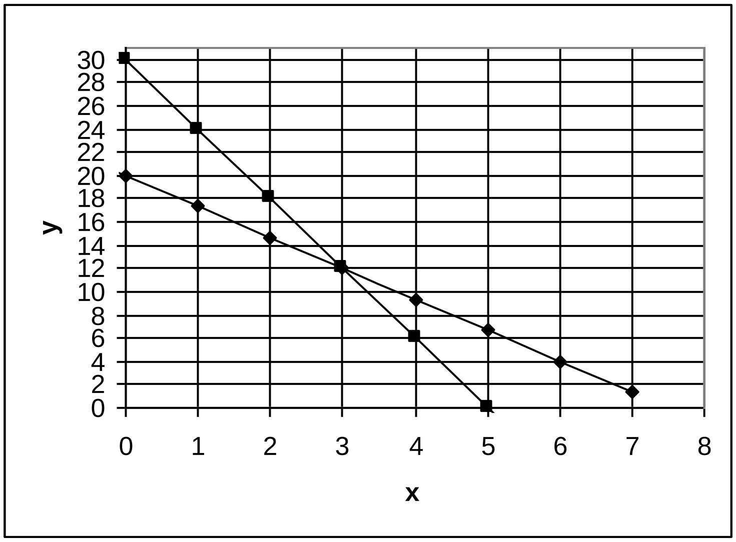
a) $\begin{cases} 2x-3y=0 \\ 4x+y=14 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -\frac{3}{5}x+\frac{4}{3}y=4 \\ 2x-y=-3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{x+1}{10}+\frac{y-4}{6}=x-1 \\ \frac{x+5}{7}-\frac{y-7}{3}=3y-x \end{cases}$

Ejercicio Nº 12: Justifique Cual de los siguientes sistemas de ecuaciones corresponde al gráfico mostrado.

a) $\begin{Bmatrix} \frac{2}{3} \cdot x + \frac{1}{4} \cdot y = 6 \\ 2 \cdot x - y = 5 \end{Bmatrix}$ b) $\begin{Bmatrix} \frac{2}{3} \cdot x + \frac{1}{4} \cdot y = 5 \\ 6 \cdot x + y = 30 \end{Bmatrix}$



Ejercicio Nº 13:
El triplo de un número es igual al número aumentado en 8. Hallar el número.

Ejercicio Nº 14:
Cuatro veces un número es igual al número aumentado en 30. Hallar el número.

Ejercicio Nº 15:
En un gallinero hay gallinas y conejos. ¿Cuántos animales hay de cada clase si hay 144 patas y 50 cabezas?

Ejercicio Nº 16:
Un estanciero vendió los 5/7 de su tropilla de caballos; en seguida compró 12; teniendo entonces 48 caballos menos que al principio. ¿Cuántos tenía antes de la primera venta?

Ejercicio Nº 17:

Un estanciero vendió las 5/7 partes de su tropilla de caballos y compró 12, teniendo entonces 48 caballos menos que al principio, ¿cuántos caballos tenía antes de la primera venta?

Ejercicio Nº 18:

Existen varias reglas para determinar las dosis de medicina para terneros especificadas las de los novillos. Tales reglas pueden basarse en el peso, la altura a la cruz, etc. Si **A**= edad del ternero (años), **D**= dosis para novillo y **C**= dosis para terneros (en años), ¿a que edad la dosis para terneros es la misma usando estas reglas? A continuación, se presentan dos reglas para el cálculo

$$\mathrm{Re}\,gla\,de Young \quad C = \frac{AD}{12}$$

$$\mathrm{Re}\,gla\,de Covulinig\; C = \frac{A+1}{24}D$$

Ejercicio Nº 19:

Un aspersor que rocía agua con un patrón circular es colocado en el centro de un terreno cuadrado con área de 1250 pies^2. ¿Cuál es el radio más pequeño que puede usarse si el campo debe estar totalmente contenido dentro del circulo?, ¿Cuál es la superficie de más que estoy fumigando?

Ayuda: calculo de la hipotenusa de un triángulo rectángulo (cateto más largo) $hip^2 = a^2 + b^2$

Ejercicio Nº 20:

El perímetro de un lote rectangular que va a ser alambrado es de 2000 metros y su largo es 3 veces el ancho. ¿Determine las dimensiones del lote?

Ejercicio Nº 21:

El cuerpo de un pez pesa cuatro veces lo que pesa la cabeza y la cola 500 gramos más que la cabeza. Si el peso es de 10 Kg, ¿cuál es el peso de cada parte?

CAPÍTULO V: UNIDADES

5.1- SISTEMAS DE UNIDADES

Llamamos ***magnitud*** a cualquier propiedad física susceptible de ser cuantificada objetivamente en el proceso de medición.

Medir es comparar una magnitud con otra de su misma especie que se toma como unidad. En toda medición intervienen necesariamente dos partes: el sistema que queremos medir y el aparato de medida. Es importante reconocer que por mucho cuidado que pongamos en realizar una medida, nunca obtendremos el valor *exacto* de una magnitud, por ello todas las medidas están afectadas por un *error*.

En la XIV Conferencia General del Comité Internacional de Pesas y Medidas (1971) se decidió adoptar un conjunto de magnitudes fundamentales (aquellas magnitudes que no pueden ser definidas o expresadas a partir de otras) de tal manera que todas las demás, llamadas magnitudes derivadas, pudieran expresarse en función de las primeras. Además, se adoptaron también las unidades correspondientes a cada una de las magnitudes fundamentales, este proceso dio origen a lo que conocemos como ***Sistema Internacional***, abreviadamente ***SI*** (del francés Système International d'Unités).

El SI fue adoptado en casi todos los países salvo los de lengua inglesa, donde se utilizan por norma las *unidades británicas*. Cabe aclarar que en el trabajo científico se emplean en todo el mundo unidades del SI, aunque es necesario a veces realizar el pasaje de un sistema a otro, este mecanismo será descrito oportunamente en este capítulo.

A continuación, se muestran las magnitudes fundamentales junto a sus unidades básicas en el sistema Internacional:

Tabla Nº1: Magnitudes Fundamentales del Sistema Internacional			
Magnitud	**Unidad**	**Símbolo unidad**	**Símbolo dimensión**
Longitud	metro	m	L
Masa	kilogramo	Kg	M
Tiempo	segundo	s	T
Intensidad eléctrica	amperio	A	A
Temperatura	kelvin	K	K
Cantidad de sustancia	mol	mol	S

5.2- EL PATRÓN DE LONGITUD:

El **metro** es la longitud de trayecto recorrido en el vacío por la luz durante un tiempo de 1/299.792.458 de segundo. El resto del sistema métrico se puede derivar simplemente del metro, las áreas se miden en metros cuadrados, los volúmenes se miden en metros cúbicos, etc. El litro es una medida métrica de volumen de uso común. Equivale a la capacidad de una décima de un metro cúbico. Hay por consiguiente 1000 litros en un metro cúbico.

5.3- EL PATRÓN DE MASA:

El **kilogramo** (Kg) es igual a la masa del prototipo internacional del kilogramo. La verdadera norma de peso está representada por el peso de una barra de una aleación de iridio y platino que se conserva en París. Los pesos se definen tomando un volumen unitario y llenándolo con agua. Un metro cúbico de agua es igual a una tonelada métrica. Un centímetro cúbico de agua es igual a un gramo. Un decímetro cúbico de agua es equivalente a un kilogramo. Un litro de agua es equivalente a un kilogramo, puesto que el volumen de un litro es un decímetro cúbico.

5.4- EL PATRÓN DE TIEMPO:

El **segundo** (s) es el tiempo ocupado por 9.192.631.770 vibraciones de la radiación (de una longitud de onda específica) emitida por un átomo de cesio.

Además de las unidades básicas existen lo que se denomina “Unidades SI derivadas” se definen de forma que sean coherentes con las unidades básicas. Varias de estas unidades SI derivadas se expresan simplemente a partir de las unidades SI básicas. Otras han recibido un nombre especial y un símbolo particular.

TABLAS

A continuación, se muestran tablas con las unidades derivadas y su representación en el sistema internacional

Tabla Nº2: Magnitudes Derivadas del Sistema Internacional

Magnitud	**Nombre**	**Símbolo**
Superficie	Metro cuadrado	m^2
Volumen	Metro cúbico	m^3
Velocidad	Metro por segundo	m/s
Aceleración	Metro por segundo cuadrado	m/s^2
Masa en volumen	Kilogramo por metro cúbico	Kg/m^3
Velocidad angular	Radián por segundo	Rad/s
Aceleración angular	Radián por segundo cuadrado	Rad/s^2

Tabla Nº3: Magnitudes Derivadas del Sistema Internacional con Nombres Propios.				
Magnitud	**Nomb**	**Símb**	**Expresión en ot unidades SI**	**Expresión en unidad básicas**
Frecuencia	Hert	Hz		s^{-1}
Fuerza	Newt	N		$m \cdot Kg \cdot s^{-2}$
Presión	Pasc	Pa	$N \cdot m^{-2}$	$m^{-1} \cdot Kg \cdot s^{-2}$
Energía, trabajo, cantidad de calor	Joul	J	$N \cdot m$	$m^{2} \cdot Kg \cdot s^{-2}$
Potencia	Wat	W	$J \cdot s^{-1}$	$m^{2} \cdot Kg \cdot s^{-3}$
Cantidad de electricidad carga eléctrica	Coulo	C		$s \cdot A$
Potencial eléctrico fuerza electromotriz	Vol	V	$W \cdot A^{-1}$	$m^{2} \cdot Kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-1}$
Resistencia eléctrica	Ohn	Ω	$V \cdot A^{-1}$	$m^{2} \cdot Kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-2}$
Capacidad eléctrica	Fara	F	$C \cdot V^{-1}$	$m^{-2} \cdot Kg^{-1} \cdot s^{4} \cdot A^{2}$
Flujo magnético	Web	Wb	$V \cdot s$	$m^{2} \cdot Kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-1}$
Inducción magnética	Tesl	T	$Wb \cdot m^{-2}$	$Kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-1}$
Inductancia	Henr	H	$Wb \cdot A^{-1}$	$m^{2} \cdot Kg\ s^{-2} \cdot A^{-2}$

Los prefijos, como *kilo*, *deci*, etc., se usan mucho en el sistema métrico. Un prefijo indica la multiplicación o división de la unidad básica por 10 ó uno de sus múltiplos, 100, 1000, etc. Los prefijos utilizados se describen en la siguiente tabla:

Tabla Nº4: Prefijos del Sistema Internacional.					
Aumentativos			***Diminutivos***		
x 10	Deca	da	x 10^{-1}	Deci	d
x 10^{2}	Hecto	h	x 10^{-2}	Centi	c
x 10^{3}	Kilo	K	x 10^{-3}	Mili	m
x 10^{6}	Mega	M	x 10^{-6}	Micro	μ
x 10^{9}	Giga	G	x 10^{-9}	Nano	N
x 10^{12}	Tera	T	x 10^{-12}	Pico	P
x 10^{15}	Peta	P	x 10^{-15}	Femto	F

5.5- INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS DIMENSIONAL.

Asociada con cada cantidad medida hay una *dimensión*, como lo muestra la tabla Nº1.
Toda ecuación debe ser *dimensionalmente compatible*, es decir, las dimensiones en ambos lados de la ecuación deben ser las mismas.
La atención a las dimensiones puede a menudo evitar que se cometan errores al escribir las ecuaciones.
Como ejemplo, consideremos que se dispone de la siguiente ecuación para calcular la superficie de un potrero: $S = l_1 \, l_2 + \frac{l_3 \, l_2}{2}$

La representación esquemática del mismo puede verse en la figura Nº1:

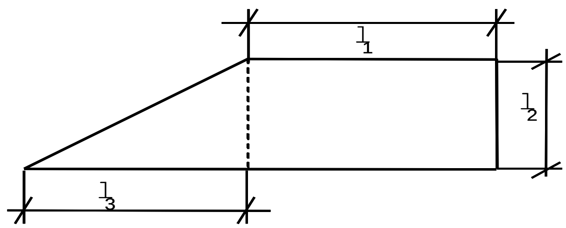


Figura Nº 1

Si los lados (ℓ) están en metros y debido a que la dimensión correspondiente es **L** podríamos expresar:

$$S = \ell_1 \cdot \ell_2 + \frac{\ell_3 \cdot \ell_2}{2}$$
$$[S] = [m^2] = L \cdot L + L \cdot L$$
$$[S] = L^2 + L^2$$
$$[S] = L^2$$
$$\downarrow \qquad \downarrow$$
$$[m^2] = [m^2]$$

Esto está de acuerdo con las unidades de superficie expresadas en la tabla N° 2.
Si la ecuación hubiese estado escrita de la siguiente manera: $S = l_1 \cdot l_2 + \frac{l_3}{2}$ el análisis dimensional sería de utilidad para poner en evidencia el error, esto es:

$$S = \ell_1 \cdot \ell_2 + \frac{\ell_3}{2}$$
$$[S] = \left[m^2\right] = L \cdot L + L$$
$$[S] = L^2 + L$$
$$\underbrace{\left[m^2\right] = \left[m^2\right] + [m]}_{ERROR}$$

5.6- __CAMBIO DE UNIDADES__

Existen dos formas de trabajar con el cambio de unidades, la primera de ella utiliza la regla de tres y en la segunda se recurre al hecho de que cualquier cantidad puede ser multiplicada por 1 sin que ésta cambie su valor. Explicaremos a continuación esta segunda forma de trabajo.

Supongamos que un animal corre a una velocidad de 45 km/h y se desea convertir este valor a m/min, veamos como es posible efectuar este cambio.
Como $1000\ m = 1 km$ y además $1h = 60\min$ podemos plantear:

$Velocidad = 45 \frac{\cancel{km}}{\cancel{h}} \frac{1000m}{1\cancel{km}} \frac{1\cancel{h}}{60min}$ notar que $\frac{1000m}{1km} = 1$ y que $\frac{1h}{60\min} = 1$

con lo que: $Velocidad = 750 \frac{m}{min}$

Aunque por lo general utilizamos unidades del SI, en ocasiones necesitamos cambiar unidades de éste al sistema de unidades británicas o viceversa, para ello se debe disponer de una *"Tabla de Conversión de Unidades*".
A continuación, se adjuntan las principales tablas de conversión de unidades:

LONGITUD

Tabla Nº5: Tabla de conversión para longitud.

	Centímetro	Metro	Kilómetro	Pulgada (in)	Pie (ft)	Milla (mi)
1 centímetro =	1	10^{-2}	10^{-5}	0,3937	$3,281 \times 10^{-2}$	$6,214 \times 10^{-6}$
1 metro =	100	1	10^{-3}	39,37	3,281	$6,214 \times 10^{-4}$
1 kilómetro =	10^5	1.000	1	$3,937 \times 10^4$	3281	0,6214
1 pulgada (in) =	2,540	$2,540 \times 10^{-2}$	$2,540 \times 10^{-5}$	1	$8,333 \times 10^{-2}$	$1,578 \times 10^{-5}$
1 pie (ft) =	30,48	0,3048	$3,048 \times 10^{-4}$	12	1	$1,894 \times 10^{-4}$
1 milla (mi) =	$1,609 \times 10^5$	1.609	1,609	$6,336 \times 10^4$	5.280	1

MASA

Tabla Nº6: Tabla de conversión para masa.					
	gramo	kilogramo	Onza (oz)	Libra (lb)	Tonelada (ton)
1 gramo =	1	0,001	$3,527x10^{-2}$	$2,205x10^{-3}$	$1,102x10^{-6}$
1 kilogramo =	1.000	1	35,27	2,205	$3,125x10^{-5}$
1 onza =	28,35	$2,835x10^{-2}$	1	$6,250x10^{-2}$	$1,830x10^{-30}$
1 libra =	453,6	0,4536	16	1	0,0005
1 tonelada =	$1x10^{6}$	1000	$3,527x10^{4}$	2.205	1

FUERZA

Tabla Nº7: Tabla de conversión para fuerza-			
	dina	Newton (N)	1 kilogramo-fuerza (kgf)
1 dina =	1	10^{-5}	$1,020x10^{-6}$
1 Newton =	10^{5}	1	0,1020
1 kilogramo-fuerza =	$9,807x10^{5}$	9,807	1

ENERGÍA, TRABAJO, CALOR

Tabla Nº8: Tabla de conversión para energía, trabajo y calor.			
	Joule (J)	Caloría (cal)	Kilowatt-hora (kW.h)
1 Joule =	1	0,2389	$2,778x10^{-7}$
1 caloría =	4,186	1	$1,163x10^{-6}$
1 kilowatt-hora =	$3,6x10^{6}$	$8,6x10^{5}$	1

PRESIÓN

Tabla Nº9: Tabla de conversión para presión.				
	Atmósfera (atm)	Centímetro de mercurio (cm Hg)	Pascal	Libra por pulgada^{2} (lb/in^{2})
1 atmósfera =	1	76	$1,013x10^{5}$	2.116
1 centímetro de mercurio a 0°C =	$1,316x10^{-2}$	1	1333	27,85
1 pascal =	$9,869x10^{-6}$	$7,501x10^{-4}$	1	$2,089x10^{-2}$
1 libra por pulgada^{2} =	$6,805x10^{-2}$	5,171	$6,895x10^{3}$	1

POTENCIA

Tabla Nº10: Tabla de conversión para potencia.				
	Libra-pie por segundo(ft.lb/s)	Caballo de fuerza(hp)	Caloría por segundo (cal/s)	Watt (W) (W=N.m/s)
1 libra-pie por segundo =	1	$1,818x10^{-3}$	0,3239	1,356
1 caballo de fuerza =	550	1	178,1	745,7
1 caloría por segundo =	3,088	$5,615x10^{-3}$	1	4,186
1 watt =	0,7376	$1,341x10^{-3}$	0,2389	1

Tabla Nº11: Tabla de conversión para temperatura.
$°F = 1{,}8\,°C + 32$ donde °F = Grados Fahrenheit y °C = Grados Celsius
$°C = 0{,}555\ (°F - 32)$
$°K = °C + 273{,}15$ donde °K = Grados Kelvin

UNIDADES AGRARIAS DE USO CORRIENTE:

Tabla Nº12: Tabla de unidades agrarias comun
1 hectárea (ha) = 10.000 m^2
1 hectárea (ha) = 2,471 Acres
100 hectáreas = 1 km^2
1 quintal = 100 kg
1 hectárea = 2,471 acres = 107.640 pies
1 cm^2 = 0,00155 $pulgadas^2$
1 pie^2 = 929 cm^2 = 144 $pulgadas^2$
1 kg/cm^2 = 14,223 $libras/pulgadas^2$
1 atmósfera = 1,033 kg/cm^2
1 m^3 = 1.000 litros
1 legua = 5 km

A continuación, se ejemplifica su uso:
Un Ingeniero Agrónomo debe sembrar un lote de 100 ha con alfalfa, éste sabe que la densidad de siembra de la misma es de 1,838 $x10^{-3}$ lb/ft^2. ¿Cuántos kilogramos de semillas debe comprar?

Solución:

$$1{,}838\,x10^{-3}\,\frac{lb}{ft^2} = 1{,}838x10^{-3}\,\frac{lb}{ft^2}\,\frac{1\,Kg}{2{,}205\,lb}\,\frac{(1\,ft)^2}{(0{,}3048m)^2}\,\frac{10.000m^2}{1ha}$$

$$1{,}838x10^{-3}\,\frac{lb}{ft^2} = 1{,}838x10^{-3}\,\frac{\cancel{lb}}{\cancel{ft}^2}\,\frac{1\,Kg}{2{,}205\,\cancel{lb}}\,\frac{1\cancel{ft}^2}{0{,}0929\cancel{m}^2}\,\frac{10.000\cancel{m}^2}{1ha}$$

$$1{,}838x10^{-3}\,\frac{lb}{ft^2} = 89{,}73\,\frac{Kg}{ha}$$

Para 100 ha nos da un total de 8973 Kg de semillas.

5.7- EJERCICIOS DE APLICACION

Ejercicio Nº 1:

La potencia necesaria para que un colibrí pueda revolotear viene dada por la siguiente expresión: $P = \sqrt{\dfrac{w^3}{2\rho A}}$ donde: P = potencia en Kg m^2/s^3, w = Peso del pájaro, ρ = Densidad del aire en Kg/m^3 y A = Área barrida por las alas del animal en m^2.

a) ¿En qué unidades debe estar expresado el peso del animal para que la ecuación sea dimensionalmente correcta?

Ejercicio Nº 2:

La temperatura aproximada $\boldsymbol{T}$ de la piel en términos de la temperatura $\boldsymbol{T_e}$ del medio ambiente está dada por la siguiente ecuación:

$$T = 32{,}8 + 0{,}27(T_e - 20)$$

donde ambas temperaturas están expresadas en grados centígrados.

a) ¿Que términos de la ecuación debería modificar si se tiene el valor de la temperatura ambiente en °K?

b) ¿El primer término del segundo miembro es adimensional, o tiene unidades?, en caso de tenerlas especifíquelas.

Ejercicio Nº 3:

Suponga que un indicador radioactivo, como un tinte colorante, se inyecta instantáneamente al corazón de un animal en el tiempo *t = 0* y se mezcla de manera uniforme con la sangre dentro del corazón. Sea C_0 la concentración inicial del indicador en el corazón y suponga que el corazón tiene un volumen constante *V*. Conforme sangre fresca fluye al corazón suponga que la mezcla diluida (de sangre e indicador) sale a una razón constante positiva *r*. La concentración C*(t)* del indicador en el corazón en el tiempo *t* está dada por la siguiente ecuación:

$$C(t) = C_0 \; e^{-\left(\frac{r \cdot t}{V}\right)}$$

a) ¿El término $e^{-\left(\frac{r.t}{V}\right)}$ deberá tener unidades? Justifique con los cálculos que considere necesarios.

b) Si C_0 está expresada en μg/l, ¿qué unidades tendrá $C(t)$?

c) ¿Podría expresar $C(t)$ en g/m^3 si C_0 tiene las mismas unidades que en el inciso b?, ¿cómo quedaría la ecuación anterior?

Ejercicio Nº 4:

En un estudio sobre plantas arraigadas en cierta región geográfica, se determinó que en terrenos de tamaño A (en metros cuadrados), el número promedio de especies encontradas fue S y viene dado por:

$$S = 3{,}224\ A$$

a) ¿Qué unidades tiene 3,224?
b) ¿Cuántas plantas se encontrarán en 0,10 ha?
c) Si se ha encontrado un total de 8064 plantas, ¿cuántos acres se habrán estudiado?

BIBLIOGRAFÍA:

- Matemática 1 – COU; Autores: J. M. Martinez-Mediano, Cuadra López Rafael, Jiménez Villanueva J.L.; Editorial: Mc Graw-Hill, Año 1996.
- Matemática 2 – COU; Autores: Fernado Garjo, Delgado Miguel, Tabuenca Jaime; Editorial: Mc Graw-Hill, Año 1995.
- Matemática Básica para las Ciencias de la Vida; Autores: Bocco Mónica; Editorial: Trianfar, Año 2001.
- Matemática para Administración, Economía, Ciencias Sociales y de la Vida; Autores: Ernest F. Haeussler J.R., Paúl Richard S.; Editorial: Prentice Hall, Año 1997, Octava edición.
- Cálculo; Autores: Larson, Hostetler, Edwards; Editorial: Mc Graw-Hill, Año 2001, Sexta edición, Volumen 1.
- Física; Autores: Resnick-Holliday, Kane; Editorial: Cecsa, Año 1997, Cuarta edición, Volumen 1.
- Fundamentos de Matemáticas Universitarias; Autores: Carl B. Allendoerfer, Cletus O. Oakley; Editorial: Mc Graw-Hill, Año: 1973.
- Ministerio de Educación, 2013. Secuencias didácticas en Matemáticas: Educación Básica Primaria. ISBN: 978-958-691- 546-5.
- Ministerio de Educación, 2016. Secuencias Didácticas: Reflexiones sobre sus características y aportes para su diseño.
- Nexos: Construcciones Interdisciplinarias en colaboración entre Universidad y Escuelas Secundarias. Autores: Vogliotti Ana et al. Año 2018. UniRío Editora.ISBN:978-987-688-316-0.