UNIDAD N°1:

LOS NÚMEROS REALES Y SUS OPERACIONES

Objetivos:

Al finalizar esta primera unidad deberás ser capaz de:

- ✓ Familiarizarse con el campo numérico real y la recta de los números reales.
- ✓ Operar con números reales y aplicar sus propiedades.
- ✓ Operar con expresiones algebraicas enteras.
- ✓ Utilizar productos especiales.
- ✓ Establecer las reglas básicas de factorización y aplicarlas para factorizar expresiones.
- ✓ Simplificar, sumar, restar, multiplicar y dividir expresiones algebraicas racionales.

Contenidos:

UNIDAD N°1:

LOS NÚMEROS REALES Y SUS OPERACIONES

1.1 Los Números Reales
1.1.1 ¿Con qué conjunto de números trabajaremos?
1.1.2 Representación de números reales en la recta
1.1.3 Propiedades de las operaciones con números reales
1.1.3.1 Propiedad asociativa de la suma y el producto
1.1.3.2 Propiedad distributiva del producto respecto a la suma y a la resta
1.1.4 Exponentes y radicales
1.2 Expresiones Algebraicas
1.2.1 Expresiones algebraicas racionales
1.2.1.1 Expresiones algebraicas enteras
1.2.1.1.1 Productos notables
1.2.1.1.2 Reglas de factorización
1.2.1.2 Expresiones algebraicas fraccionarias
1.3 Razones y proporciones

Para poder organizarnos mejor en este camino que juntos transitaremos te presentamos la:

Organización y modalidad de lectura del módulo

Cada tema que trataremos en este módulo está organizado en una primera parte teórica con ejemplos que te mostrarán el camino de cómo aplicar la teoría, algunas actividades que te desafían a resolverlas por ti sólo. Y una segunda parte de actividades que pretenden integrar los contenidos desarrollados para poner en práctica tus conocimientos.

Asimismo, te encontrarás con preguntas a responder, las mismas tienen la intención de invitarte a recordar un concepto, una propiedad o tal vez una definición, antes de abordar la lectura del tema en cuestión. Esta práctica te ayudará a reflexionar sobre los conocimientos adquiridos, es decir, te servirán a tomar conciencia de lo que sabés y también de lo que no recordás.

El siguiente formato te indica que:

Aquí encontrarás el contenido destacado

Además, hemos insertado íconos que te irán señalando si se trata de una actividad a resolver u observaciones que debes prestar especial atención, recordatorios de conceptos que has aprendido en tu paso por la secundaria..., tal como se muestra a continuación.

Este ícono indicará una OBSERVACIÓN, NOTA o ACLARACIÓN referida al contenido que se está desarrollando

Este corresponde a EJEMPLOS

Te indica que es una ACTIVIDAD que te desafía a poner en práctica tus conocimientos.

Simboliza una REFLEXIÓN, un INTERROGANTE a responder

Prestar especial ATENCIÓN al comentario que realizamos

Procesos temporales

La bibliografía consultada para elaborar este módulo

Glosario

Para hacer uso del lenguaje matemático preciso, brindamos a continuación este glosario que contiene los símbolos y notaciones que le son propias.

SÍMBOLOS Y NOTACIONES USADOS EN MATEMÁTICA

$\in$: "pertenece a" o "perteneciente a"

$\notin$: "no pertenece" o "no perteneciente a"

$\Longrightarrow$: "implica" o "entonces"

$\Longleftrightarrow$: "implica doblemente" o "sí y sólo si"

/: "tales que"

$\wedge$: "y"

$\vee$: "o"

$\forall$: "cualquiera sea" o "para todo"

$\exists$: "existe al menos uno"

$\therefore$: "en consecuencia" o "por tanto"

!: "único"

!!: "absurdo"

$=$: "igual"

$\neq$: "distinto" o "no es igual"

$\approx$: "semejante a"

$\cong$: "es congruente a"

$//$: "es paralela a"

$\perp$: "es perpendicular a"

∞: "infinito"

$|a|$: "módulo de a" o "valor absoluto de a"

$<$: "es menor que"

$\leq$: "es menor o igual que"

$\nless$: "no es menor que"

$>$: "es mayor que"

$\geq$: "es mayor o igual que"

$\ngtr$: "no es mayor que"

$\subseteq$: "es subconjunto de" o "está incluido en"

$\subset$: "está incluido estrictamente en"

$\not\subseteq$: "no está incluido en"

$\supset$: "incluye a"

$\cap$: "intersección"

$\cup$: "unión"

1.1 Los Números Reales

En este capítulo abordaremos el concepto de **números reales** y de las **relaciones funcionales** que surgen entre variables. Su estudio se formalizará a partir de las distintas representaciones: algebraicas, gráficas, expresiones coloquiales y tabla de valores.

A partir de situaciones sencillas que se presentan en la vida diaria, se comenzará reconociendo que existen variables que muestran alguna relación de dependencia. El estudio se centrará principalmente en el concepto de **función**, que constituye el pilar fundamental del análisis matemático. Conocer los distintos tipos de funciones permite la **modelización matemática** de situaciones relacionadas con las Ciencias Económicas.

De las funciones, se analizará el dominio e imagen, el comportamiento gráfico, identificando puntos notables, intervalos de crecimiento o decrecimiento, intervalos en los cuales asumen valores positivos, negativos o nulos y valores extremos.

Para abordar satisfactoriamente estos conceptos se deberán tener presentes los conocimientos aprendidos en el nivel medio, en cuanto a propiedades y operaciones de los números reales, ecuaciones, factorización de expresiones racionales y propiedades de exponentes y radicales.

1.1.1 ¿Con qué conjunto de números trabajaremos?

"Un número es la expresión de una cantidad con relación a su unidad".

Los conocimientos matemáticos surgen ligados a cuestiones prácticas. El desarrollo de la teoría de los números es paralelo al de la medida, la ampliación del campo numérico viene de la mano de las necesidades de medición.

Los **conjuntos numéricos** son agrupaciones de números que guardan una serie de **propiedades que los caracterizan**.

Establecer la medida de una magnitud permite el desarrollo de los números racionales, ya que la unidad elegida, muchas veces, no puede ser contenida una cantidad entera de veces.

Los problemas de las mediciones de magnitudes no se terminan, aunque consideremos la totalidad de los números racionales, ya que no siempre es posible establecer el resultado de una medición con ellos. Pensemos, por ejemplo, en el caso de la diagonal de un cuadrado de lado igual a uno. Es por ello que resulta necesario un conjunto más grande que contenga a todos los números.

Los conjuntos numéricos fueron elaborados lentamente a través de los tiempos; para llegar a los conceptos que hoy nos parecen sencillos y lógicos, pasaron muchos siglos y diferentes culturas realizaron sus aportes.

El concepto de número surgió en la antigüedad, ampliándose y generalizándose con el tiempo. En el mundo occidental antiguo, Babilonia, Grecia, Egipto y Roma, desarrollaron elevados conocimientos matemáticos, que fueron aplicados a importantes obras agrícolas y arquitectónicas. Por su parte en el mundo oriental, se observa ya en el siglo III a. C., en la cultura china, que los números negativos son representados mediante barras de color negro y los números positivos por barras de color rojo.

Hacia el año 500, en la India, se plasmaron los orígenes de nuestro sistema de numeración. El principio de posición, valor relativo de las cifras, las nueve cifras y el cero aparecen en las obras del matemático Brahmagupta. En el año 772, una embajada india llevó a Bagdad los libros que recogían estos conocimientos y en la primera mitad del siglo IX se recopilaron los nuevos métodos matemáticos en el tratado de Al-Khwarizmi, siendo difundido por la civilización musulmana en Sicilia y España.

En 1202 el mercader Leonardo Pisano, reunió los conocimientos de aritmética y álgebra en su obra llamada Liber Abaci, difundiendo por Europa la numeración india. En el siglo $XIII$, el matemático italiano Fibonacci, introdujo los números negativos, a raíz de un problema referente al dinero que no tenía una solución positiva, observando así su necesidad.

En el siglo XV se aceptó que algunas ecuaciones tuvieran solución con números negativos. En el siglo XVI, se popularizo el uso de la barra horizontal para separar los términos de una fracción. El problema de los números irracionales no se resolvió por completo hasta el siglo $XVII$, cuando Fermat, matemático francés, considerado el padre de la moderna teoría de los números, demostró que expresiones como raíz cuadrada de tres no eran números racionales. En 1777, Euler solucionó el problema de las raíces negativas. En 1799, Gauss, demostró que las soluciones de cualquier ecuación algebraica, fuera cual fuese su grado, pertenecía a un conjunto de números que él llamó complejos, a los que consideró compuestos de un número ordinario, hoy llamado número real, más un múltiplo de la unidad imaginaria i, donde $i^2 = -1$.

Entre el siglo XVI al XIX, se produjo el desarrollo conceptual de los números reales. En cuanto a las unidades de medición, en el pasado había una multitud de unidades de medida distintas, cada región usaba su propio sistema. Tras la Revolución Francesa se crea un nuevo sistema de medidas: el **Sistema Métrico Decimal**, que fue adoptado por un sin número de estados por ser un sistema regular, debido a reglas que organizan sus unidades de medida y la coherencia interna entre las distintas magnitudes. El metro se presentó formalmente en junio de 1799 bajo el lema ***"Para todos los pueblos, para todos los tiempos"***.

UN POCO DE HISTORIA

El **tratado de Al-Khwarizmi**, describe con detalle el sistema hindú de numeración posicional de base diez y la manera de hacer cálculos con él. Su tratado de álgebra es una introducción compacta al cálculo, usando reglas para completar y reducir ecuaciones. Además de sistematizar la resolución de ecuaciones cuadráticas, también trata geometría, cálculos comerciales y de herencias.

En la historia del mundo contemporáneo, la **Revolución Francesa** significó el tránsito de la sociedad estamental, heredada del feudalismo, a la sociedad capitalista, basada en una economía de mercado. Los revolucionarios franceses crearon un nuevo modelo de sociedad y estado, difundiendo un modo de pensar que fue adoptado por la mayor parte del mundo occidental.

A partir del 20 de mayo de 2019, el sistema de medición sufrirá un cambio, la unidad de medida "kilogramo" será redefinida en el Sistema Internacional de Medidas, que rige desde 1889. En la Conferencia General de Pesos y Medidas, del 16 de noviembre de 2018 realizada en París, expertos de 42 países acordaron una nueva definición del kilo. Su definición tendrá como base una fórmula matemática y ya no dependerá de la magnitud de un objeto físico. Lo que permite un sistema más preciso y asequible en cualquier lugar del mundo.

Definición de Números Reales

El conjunto de los **números reales** ($\mathbb{R}$) está formado por la unión de los **números racionales** y los **números irracionales**.

Los **números racionales** ($\mathbb{Q}$) son aquellos que pueden **expresarse como fracción de números enteros**. Por lo tanto, pertenecen a este conjunto los números naturales ($\mathbb{N}$), los números enteros ($\mathbb{Z}$) y los números racionales no enteros, también llamados fraccionarios (F) que se componen por las expresiones decimales y las periódicas.

Los **números irracionales** (I) son aquellos que **no pueden escribirse como fracción de números enteros** y no tienen período (su expresión decimal tiene infinitas cifras decimales no periódicas).

En el siguiente esquema se presentan a los diferentes conjuntos numéricos con los que trabajaremos a lo largo de la asignatura:

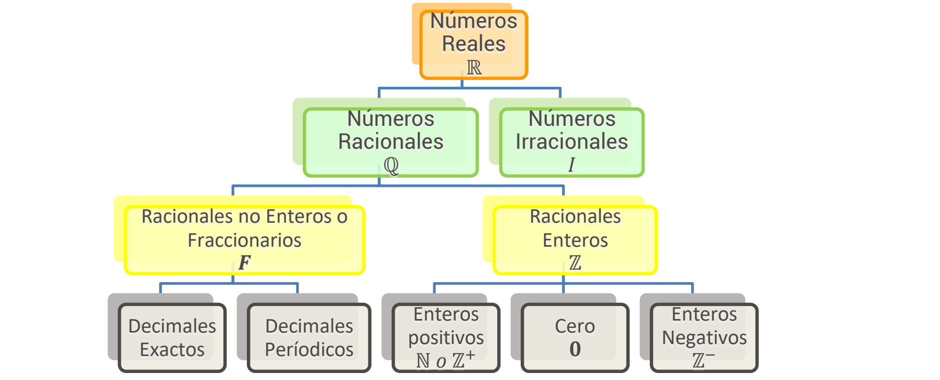


Fig: 1.: Los Números Reales

CARACTERÍSTICAS DE LOS NÚMEROS REALES

1) Forman un conjunto infinito, que no tiene ni primer ni último elemento.
2) Entre dos números reales hay infinitos números reales.
3) A cada número real, le corresponde un único punto en la recta numérica. Recíprocamente, a cada punto de la recta le corresponde un solo número real. El conjunto $\mathbb{R}$ "completa" o "llena" la recta numérica.

El conjunto de los **números naturales** se denota como:
$\mathbb{N}: \{1,2,3, \cdots\}$ ó $\{x/x \in \mathbb{N}\}$

Lo simbolizamos entre llaves, nombrando los primeros elementos y escribiendo tres puntos suspensivos, dado que el listado continúa sin fin. Con este conjunto podemos sumar y multiplicar, obteniendo como resultado otro número natural, pero no siempre es posible restar y dividir dos números naturales y obtener como resultado otro número natural.

Surge entonces:

El conjunto de los enteros negativos ($\mathbb{Z}^-: \{\cdots, -4, -3, -2, -1\}$), junto al cero $\{0\}$ y a los naturales (también llamados enteros positivos, $\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N}$), forman el conjunto de los **números enteros**:

$$\mathbb{Z} = Z^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^-$$

En este conjunto es posible resolver, además de la suma y multiplicación, la resta y obtener como resultado otro número entero.

Es importante destacar que no es posible enumerar a todos los elementos que componen el conjunto de los números naturales, pero en vez de ello, podemos expresar cuáles son sus elementos a través de una condición que se establece entre llaves y utilizando el símbolo " / " (tal que). Esta forma de denotar al conjunto se denomina **por comprensión**.

Dentro del conjunto de los números enteros, no todas las divisiones de dos números enteros dan como resultado otro número entero y esto ocurre cuando el **dividendo** no es múltiplo del **divisor**.

Los **números fraccionarios**, F, dan solución a esta situación y junto a los enteros forman el conjunto de los números racionales, simbolizado con una $\mathbb{Q}$. Este último conjunto, comprende a todo número que pueda expresarse como un cociente $\frac{p}{q}$, donde tanto "p" como "q" son enteros y $q \neq 0$.

Hay dos maneras de escribir un mismo número racional, como fracción o en forma decimal resolviendo el cociente.

Los elementos de un conjunto numérico se listan de menor a mayor.

Existen números que no son racionales como, por ejemplo, la diagonal de un cuadrado lado 1 mide una longitud igual a la raíz cuadrada de 2, es decir $\sqrt{2}$. Esta expresión no puede escribirse como un cociente de números enteros. Es por ello que, $\sqrt{2}$ lleva el nombre de número irracional (Ver Fig. 4).

Otros números irracionales son: $\sqrt{3}, \sqrt{7}, -\sqrt{10}, \pi$. Este último (Ver Fig. 4) es la razón entre la distancia alrededor de un círculo (*su circunferencia*) y la distancia a través de él (*su diámetro*).

Así se completa el conjunto de los números reales, $\mathbb{R}$, con el subconjunto de los números irracionales, I:

Los números irracionales, I, no pueden ser escritos como una división entre enteros y se expresan **con infinitas cifras decimales NO periódicas**. Algunos provienen de raíces no exactas.

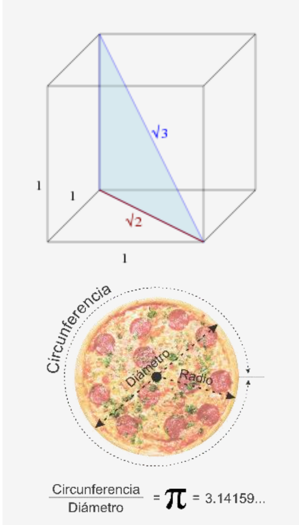


Fig. 2.: Números Irracionales

1.1.2 Representación de los Números Reales en la Recta

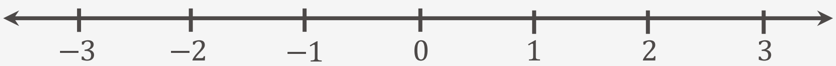
Seguramente ya conoces cómo representar a los números en una recta numérica, pero ¿cómo la introducimos en nuestra vida cotidiana? En los textos que leemos es frecuente encontrar referencias a lustros, décadas, etc. Trabajar con magnitudes es objeto sistemático no solo de la matemática, sino también de la historia.

Para comprender la relación biunívoca que existe entre los puntos de la recta y los números reales, es posible pensar que, al representar diferentes acontecimientos transcurridos en el tiempo, se tiene la percepción intuitiva de que éste es una magnitud continua, que transcurre sin saltos ni interrupciones.

Una recta es la representación ideal del tiempo, que viene desde el menos infinito, se extiende hacia el infinito y que en cada punto de la recta representa un instante en el tiempo, un número real. Además, los días, las semanas, meses, años, lustros, décadas, siglos, milenios, etc. son intervalos de diferentes tamaños contenidos dentro del campo numérico real.

Definición de Recta Numérica o Recta Real:

La recta numérica o recta real es un gráfico unidimensional de una línea recta, la cual contiene a todos los números reales mediante una correspondencia biunívoca, en donde se asocia cada número con un punto de la recta.



De esta manera, a cada punto sobre la recta le corresponde un número real único, y a cada número real le corresponde un único punto sobre la recta.

Para representar un punto en la recta, se selecciona un punto que representa el cero, llamado origen, luego se elige un segmento unidad, cuya medida se marca sucesivamente a la derecha y a la izquierda del cero. Las posiciones a la derecha del origen son consideradas positivas y a la izquierda negativas.

ACTIVIDAD 1:

Escribe a qué conjunto numérico Q (racional) o I (irracional) pertenece cada uno de los siguientes números:

$\sqrt{2} \in$; $-2 \in$; $1{,}434343\ldots \in$; $0{,}123456\ldots \in$

$1{,}1415 \in$; $\frac{3}{5} \in$; $-\frac{5}{3} \in$; $132 \in$

$1{,}8\hat{9} \in$ $-2{,}565758\ldots \in$; $\sqrt[3]{7} \in$; $\sqrt{81} \in$

ACTIVIDAD 2:

Traza una recta, fija el origen y un segmento unidad, y representar los siguientes números reales:

$$-3 \;;\; 2{,}5 \;;\; \frac{4}{3} \;;\; -\frac{1}{2} \;;\; \pi$$

1.1.3 Propiedades de las operaciones con números reales

Muchos de los errores que se cometen al operar con números reales surgen por desconocimiento u olvido de algunas de ellas.

Damos a continuación las propiedades básicas de las operaciones con números reales.

Comencemos con las **PROPIEDADES DE LA SUMA Y EL PRODUCTO DE NÚMEROS REALES**.

Para todos los números reales a, b y c , se cumplen las siguientes propiedades.

PROPIEDADES	EJEMPLO
$a+b=b+a$	$2+3=3+2$
$a \cdot b=b \cdot a$	$5 \cdot(-3)=(-3) \cdot 5=-15$
$(a+b)+c=a+(b+c)$	$(2+3)+5=2+(3+5)$
$(a \cdot b) \cdot c=a \cdot(b \cdot c)$	$(3 \cdot 4) \cdot 5=3 \cdot(4 \cdot 5)$
$a+0=a$ y $0+a=a$	$3+0=a$ y $0+3=3$
$a \cdot 0=0$ y $0 \cdot a=0$	$2 \cdot 0=0$ y $0 \cdot 2=0$
$a \cdot 1=a$ y $1 \cdot a=a$	$5 \cdot 1=5$ y $1 \cdot 5=5$
$a+(-a)=(-a)+a=0$	$4+(-4)=(-4)+4=0$
$a \cdot \frac{1}{a}=1$ y $\frac{1}{a} \cdot a=1$ si $a \neq 0$	$7 \cdot \frac{1}{7}=1$ y $\frac{1}{7} \cdot 7=1$
$a \cdot(b+c)=a \cdot b+a \cdot c$	$2 \cdot(3+4)=2 \cdot 3+2 \cdot 4$
$a \cdot(b-c)=a \cdot b-a \cdot c$	$5 \cdot(2-4)=5 \cdot 2-5 \cdot 4$

De todas las propiedades que hemos enunciado, trataremos especialmente algunas de las que ocasionan más errores al operar con dicho conjunto de números.

Comenzaremos con la:

1.1.3.1 Propiedad asociativa de la suma y el producto

En símbolos la propiedad se escribe:

$\forall a, b\ y\ c \in \mathbb{R}: (a+b)+c = a+(b+c)$ y $(a.b).c = a.(b.c)$

Significa que, tanto en la suma como en el producto, los números pueden agruparse en cualquier orden.

Advierte que ni la resta ni la división tienen esta propiedad, y esto es porque el orden en que se agrupan los números altera el resultado.

Veamos algunos ejemplos:

- ✓ $2+3+4 = (2+3)+4 = 2+(3+4) = 9$
- ✓ $10\,.\,3\,.\,\frac{1}{2} = 10\,.\left(3\,.\,\frac{1}{2}\right) = (10\,.\,3)\,.\,\frac{1}{2} = 15$

Sin embargo, la propiedad asociativa no se verifica en el caso de la división, ni de la diferencia:

$(16:4):2 = 4:2 = 2 \quad \neq \quad 16:(4:2) = 16:2 = 8$

$(10-5)-3 = 5-3 = 2 \quad \neq \quad 10-(5-3) = 10-2 = 8$

Otra de las propiedades de las operaciones con números reales que aplicaremos frecuentemente es la:

1.1.3.2 Propiedad distributiva del producto respecto a la suma y a la resta

Como su nombre lo indica, “distribuye” la operación producto “dentro” de la suma o la resta.

En símbolos la propiedad se escribe:

$\forall a, b\ y\ c \in \mathbb{R}: a.(b+c) = a.b + a.c$ o $(b+c).a = b.a + c.a$

y

$a.(b-c) = a.b - a.c$ o $(b-c).a = b.a - c.a$

Establece que si un número multiplica a la suma (ó resta) de otros, es posible resolver la suma (ó resta) y luego multiplicar el resultado por el factor ó multiplicar el factor por cada término de la suma (ó resta) y por último sumar (ó restar) los resultados parciales.

Esta última opción es la que aplica la propiedad distributiva del producto respecto de la suma (ó resta) de números reales.

Veamos algunos ejemplos en los que efectuamos las opciones descriptas precedentemente para que se aprecie que se arriba al mismo resultado.

- ✓ $2\,(3+5) = 2.3 + 2.5 = 6 + 10 = 16$ → **Distribuimos el factor 2**
- ✓ $2\ .\ 8 = 16$ → **Resolvimos primero el paréntesis**
- ✓ $\frac{1}{4}.(32-12+4) = \frac{32}{4} - \frac{12}{4} + \frac{4}{4} = 8 - 3 + 1 = 6$ → **Distribuimos $\frac{1}{4}$**
- ✓ $\frac{1}{4}.(24) = \frac{24}{4} = 6$ → **Resolvimos primero el paréntesis**

La propiedad anterior establece que el producto es distributivo respecto a la suma, por lo que no hay que confundir la propiedad en el otro sentido: La suma **NO es distributiva** respecto al producto. Es decir que si la operación a realizar es $2 + (3.5)$, no confundirse queriendo aplicar la propiedad.

Seguidamente enunciamos otras propiedades que se relacionan con la regla de los signos y que sería importante recordar. Si a, b, c y d son números reales, (distintos de cero cuando figuran como denominador):

¡**PRECAUCIÓN**! Cuando intervienen más de dos factores se debe prestar atención a los signos que van asumiendo los resultados parciales.
Si hay un número impar de factores negativos el resultado será negativo, si el número de factores con signo negativo es par, el resultado será positivo.

PROPIEDADES	EJEMPLO
$a-(-b)=a+b$	$2-(-3)=2+3=5$
$(-1)\cdot a=-a$	$(-1)\cdot 4=-4$
$-(a+b)=-a-b$	$-(2+5)=-2-5=-7$
$-(a-b)=-a+b$	$-(3-4)=-3+4=1$
$-(-a)=a$	$-(-9)=9$
$(-a)\cdot b=-ab$	$(-8)\cdot 6=-8.6$=-48
$(-a)\cdot(-b)=ab$	$(-2)\cdot(-4)=2.4=8$
$-a\cdot\left(\frac{1}{b}\right)=\frac{-a}{b}=-\frac{a}{b}$	$-3\cdot\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{-3}{4}=-\frac{3}{4}$
$\frac{a}{-b}=\frac{-a}{b}=-\frac{a}{b}$	$\frac{2}{-3}=\frac{-2}{3}=-\frac{2}{3}$

Por último, recordamos las siguientes propiedades:

PROPIEDADES	EJEMPLO
$\frac{0}{a}=0 \text{ con } a\neq 0$	$\frac{0}{3}=0$
$a\left(\frac{b}{a}\right)=b$	$4\left(\frac{5}{4}\right)=5$
$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a.c}{b.d}$	$\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}=\frac{2.3}{5.4}$
$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{c}=\frac{a.c}{b.c}=\frac{a}{b}$	$\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{3}=\frac{2.3}{5.3}=\frac{2}{5}$

Esta última propiedad constituye la PROPIEDAD FUNDAMENTAL DE LAS FRACCIONES según la cual, si multiplicamos o dividimos numerador y denominador de una fracción por un mismo número (excepto el 0), obtenemos una fracción equivalente a la dada.

PROPIEDADES	EJEMPLO
$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}$	$\frac{2}{4} \pm \frac{3}{4} = \frac{2 \pm 3}{4}$
$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm cb}{bd}$	$\frac{2}{4} \pm \frac{3}{5} = \frac{2 \cdot 5 \pm 3 \cdot 4}{4 \cdot 5}$
$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$	$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}} = \frac{2}{3} \div \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 4}$

Esta última propiedad, corresponde a un cociente de fracciones, que se resuelve realizando el producto de extremos sobre producto de medios, o también convirtiendo el cociente en multiplicación de la fracción que figura como numerador por la fracción inversa que figura en el denominador.

En general, el cero dividido por cualquier otro número, da como resultado 0, con la sola excepción de que el denominador también sea cero, ya que la expresión $\frac{0}{0}$ no tiene solución.
Si el cero aparece como divisor de cualquier cociente, la operación NO tiene solución.

Hemos recordado al conjunto de los números reales, sabemos qué operaciones podemos hacer con ellos y repasamos algunas de las propiedades más importantes.

¿Estamos en condiciones de comenzar a realizar operaciones con ellos y aplicar sus propiedades?

Creemos que sí, no obstante, nos parece importante que previo a ello te advirtamos sobre errores que por su frecuencia justifican que nos detengamos a considerarlos.

La revisión de algunos procedimientos que frecuentemente ocasionan errores, permitirá que reflexionemos sobre ellos para poder evitarlos.

La manipulación de números reales es esencial para tener éxito en matemática.

La llamada Ley de los signos se aplica tanto para el producto como para el cociente de números reales

LEY DE LOS SIGNOS	
Producto	**Cociente**
$(+)\cdot(+) = +$	$(+) : (+) = +$
$(-)\cdot(-) = +$	$(-) : (-) = +$
$(+)\cdot(-) = -$	$(+) : (-) = -$
$(-)\cdot(+) = -$	$(-) : (+) = -$

Antes de avanzar, piensa y responde: ¿es posible efectuar las siguientes divisiones: $\frac{a}{0}$ y $\frac{0}{a}$, con $a \neq 0$?

………

………

Si aparece el cero como factor de un producto, cualquiera sea el número o el signo de los demás factores, anula todo el resultado. Si aparece en un cociente como dividendo, también el resultado es nulo.

Veamos los siguientes ejemplos:

- ✓ $3\,.\,50\,.\,(-2).\,0\,.\left(-\frac{2}{3}\right) = 0$
- ✓ $0 : 3 = \frac{0}{3} = 0$

Los siguientes ejemplos muestran que**: Si el cero aparece como divisor de un cociente, la operación NO tiene solución.**

- ✓ $-\frac{2}{0}$ **NO TIENE SOLUCIÓN**

No hay ningún real que multiplicado por cero nos de -2

- ✓ $\frac{(-1).(-3).\,15}{2\,.\,0\,.\,(-4)}$ **NO TIENE SOLUCIÓN**

Tampoco pudimos resolver este último cociente porque el cero anula el denominador y como la división por cero no existe, el cociente no puede resolverse.

Como regla general, en cuanto a la simplificación de fracciones, podemos afirmar que en la multiplicación de fracciones es posible simplificar numeradores con denominadores; en cambio, si se las divide, es posible simplificar numeradores y denominadores entre sí.

Recuerda que al multiplicar fracciones se obtiene una nueva fracción cuyo numerador es el resultado de multiplicar los numeradores y su denominador, el producto de los denominadores.

Resolvamos el siguiente producto de Fracciones:

$$\frac{5}{3}\cdot\frac{4}{5}=\frac{5\,.\,4}{3\,.\,5}=\frac{\overset{4}{\cancel{20}}}{\underset{3}{\cancel{15}}}=\frac{4}{3}$$

Hemos simplificado por 5, numerador y denominador

También se pudo haber simplificado antes de efectuar la operación

$$\frac{\overset{1}{\cancel{5}}}{3}\cdot\frac{4}{\underset{1}{\cancel{5}}}=\frac{4}{3}$$

Los dos procedimientos de simplificación son correctos y permiten arribar a igual resultado.

Si se trata de una división de fracciones, se resuelve multiplicando el numerador de la primera fracción por el denominador de la segunda para formar el numerador del resultado y dividiéndola por producto entre el denominador de la primera fracción por el numerador de la segunda.

Consideremos el siguiente ejemplo:

✓ $$\frac{2}{3} : \frac{4}{9} = \frac{2 \,.\, \overset{3}{\cancel{9}}}{3 \,.\, \underset{2}{\cancel{4}}} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$$

Hemos simplificado por 6, numerador y denominador

También se pudo haber simplificado numeradores y denominadores entre sí, previo a efectuar el cociente y el resultado hubiese sido el mismo.

$$\frac{\overset{1}{\cancel{2}}}{\underset{1}{\cancel{3}}} : \frac{\overset{2}{\cancel{4}}}{\underset{3}{\cancel{9}}} = \frac{1 \,.\, 3}{1 \,.\, 2}$$

La misma operación pudo estar indicada con línea de fracción

✓ $$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{9}} = \frac{\overset{3}{\cancel{18}}}{\underset{2}{\cancel{12}}} = \frac{3}{2}$$

Multiplicamos extremos y lo dividimos por el producto de los medios, por último, simplificamos por 6, numerador y denominador.

También se pudo haber simplificado antes de efectuar el cociente, extremos con medios.

Estas simplificaciones que redujeron en forma correcta, multiplicaciones y divisiones de fracciones, suelen trasladarse, erróneamente a operaciones de suma y resta de fracciones.

Veamos un ejemplo de suma de fracciones en donde cometimos un error muy común:

Procedimiento incorrecto.

$$\frac{1}{\underset{1}{\cancel{2}}} + \frac{\overset{2}{\cancel{4}}}{5}$$

Es frecuente, el tratar de simplificar el 2 con el 4, por ser ambos divisibles por 2 y aparecer como numerador y denominador respectivamente, sin advertir que en este caso las fracciones están sumadas y que deberá resolverse sacando común denominador.

La única simplificación válida en operaciones de suma y resta de fracciones es cuando es posible reducir el numerador con el denominador de la misma fracción, y luego se resuelve a través del procedimiento de suma o resta de fracciones.

Veamos el **procedimiento correcto** del ejemplo dado:

✓ $\frac{1}{2}+\frac{4}{5}=\frac{\quad}{10}$

Primero buscar un denominador común que sea divisible por ambos denominadores

$(10:\ 2).1\ =5$ y $(10:\ 5).4\ =8$

$$\frac{1}{2}+\frac{4}{5}=\frac{5+8}{10}=\frac{13}{10}$$

Segundo, dividir ese denominador común por cada denominador para luego multiplicarlo por el numerador respectivo

Resolvemos la suma en el numerador

El proceso inverso también puede realizarse.

Por ejemplo:

✓ $\frac{-1+3+11-2}{5}=-\frac{1}{5}+\frac{3}{5}+\frac{11}{5}-\frac{2}{5}$ →

Si tenemos operaciones de suma o resta en el numerador con un denominador en común, podemos distribuir ese denominador en cada término del numerador

Si en el numerador tenemos un producto con un denominador común ¡CUIDADO!, el denominador no se distribuye en ese producto.

Observa el siguiente ejemplo:

$$\frac{5\,.\,8}{10}\neq\frac{5}{10}\cdot\frac{8}{10}$$
$$\frac{40}{10}\neq\frac{40}{100}$$

Hemos visto que podemos distribuir un mismo denominador en una suma, pero si la suma está en el denominador, ¿es posible distribuir ese numerador?

¡ATENCIÓN! No es posible efectuar esa distribución

. Por ejemplo:

$$\frac{3}{2+5}=\frac{3}{7}\quad\neq\quad\frac{3}{2}+\frac{3}{5}=\frac{15+6}{10}=\frac{21}{10}$$

RECUERDA: siempre debes prestar atención cuando operes con números, pero presta especial atención cuando adviertas signos negativos, el cero, cuando quieras simplificar y cuando aparezcan fracciones.

Teniendo en cuenta las propiedades que repasamos, te proponemos resolver las actividades siguientes, comenzando con operaciones combinadas sencillas.

A veces suele confundirse la potencia con un simple producto y se resuelve 2^3 INCORRECTAMENTE como $\mathbf{2\,.\,3\ =\ 6}$

ACTIVIDAD 3: Resuelve las siguientes operaciones con números reales:

a) $\frac{2}{3} + 9 =$

b) $\frac{5}{3}\,.\,9 - \left(-\frac{1}{4}\right) =$

c) $4.\,(-2+5) =$

Avanzando un poco más con las operaciones con números reales, incluimos en este repaso los exponentes y radicales.

1.1.4 Exponentes y radicales

¿Recuerdas qué operación indica una potencia con exponente entero?

La expresión 2^3 es una potencia de base 2 y exponente 3 que se resuelve multiplicando tantas veces la base como lo indica el exponente.

Por ello:

$$2^3 = \underbrace{2\,.\,2\,.\,2}_{\substack{Multiplicamos \\ 3\ veces\ el\ 2}} = 8$$

Recordemos las **PROPIEDADES BASICAS DE LOS EXPONENTE**

PROPIEDADES	EJEMPLO
$x^n = x \cdot x \cdot x \cdot \ldots \cdot x$	$2^5 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{5\,factores}$
$x^n \cdot x^m = x^{n+m}$	$x^2 \cdot x^3 = x^{2+3} = x^5$ $2^3 \cdot 2^5 = 2^{3+5} = 2^8 = 256$
$x^0 = 1$ si $x \neq 0$	$2^0 = 1$
$x^{-n} = \frac{1}{x^n} = \frac{1}{\underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n\,factores}}$	$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$
$\frac{1}{x^{-n}} = x^n$	$\frac{1}{x^{-5}} = x^5$ $\frac{1}{2^{-3}} = 2^3$
$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n} = \frac{1}{x^{n-m}}$	$\frac{2^{12}}{2^8} = 2^{12-8} = 2^4 = 16$ $\frac{2^8}{2^{12}} = 2^{8-12} = 2^{-4} = \frac{1}{16}$
$\frac{x^m}{x^m} = x^{m-m} = x^0 = 1$	$\frac{2^4}{2^4} == 1$
$(x^m)^n = x^{m \cdot n}$	$(x^5)^3 = x^{5 \cdot 3} = x^{15}$ $(2^3)^2 = 2^{3 \cdot 2} = 2^6 = 64$
$(x \cdot y)^n = x^n y^n$	$(2 \cdot 4)^3 = 2^3 4^3$
$\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}$
$\left(\frac{x}{y}\right)^{-n} = \left(\frac{y}{x}\right)^n$	$\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$

Veamos un ejemplo en el que aparece una potencia en uno de los factores de un producto:

✓ $(-8).\left(\frac{1}{2}\right)^4$

Como el exponente afecta solo a uno de los factores, primero se debe resolver la potencia y luego multiplicar ese resultado por el otro factor (-8)

En este producto no es posible simplificar el 2 con el (-8) ya que el 2 está afectado por el exponente 4 y el (-8) no lo está.

La potencia es distributiva respecto del cociente y del producto, por lo que, podemos distribuir el exponente 4 en el numerador y en el denominador de la fracción

$$(-8)\,.\frac{1^4}{2^4} =$$

Resolvemos las potencias obtenidas

$$(-8)\,.\frac{1}{16} =$$

$$(\cancel{-8}^{\,-1})\,.\frac{1}{\cancel{16}_{\,2}}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

Y por último simplificamos

Hemos recordado cómo se resuelven las potencias de exponente entero positivo, pero ¿qué sucede si el exponente es cero o un número entero negativo?

TODO número (excepto el cero) elevado al exponente 0, da por resultado 1.

Ejemplos:

✓ $15^0 = 1$

✓ $\left(-\frac{3}{2}\right)^0 = 1$

✓ 0^0 **NO TIENE SOLUCIÓN.**

Si, en cambio, el exponente de la potencia es un número entero negativo, el procedimiento correcto para resolverlo consiste en elevar al

inverso multiplicativo de la base al mismo exponente, pero con signo positivo.

¿Recuerdas cómo se obtienen los inversos multiplicativos o recíprocos?

El recíproco de $\frac{5}{4}$ es $\frac{4}{5}$

El de 3 es $\frac{1}{3}$

El de -3 es -$\frac{1}{3}$ (advierte que no cambiamos el signo)

El de 1 es $\frac{1}{1} = 1$

El de 0 **NO EXISTE** porque sería $\frac{1}{0}$ y la división por cero no está definida.

Resolvamos, por ejemplo, una potencia con exponente negativo.

✓ $\left(\frac{2}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{2}\right)^{2} = \frac{5^2}{2^2} = \frac{25}{4}$

Veamos otro ejemplo combinando el producto y el exponente negativo.

✓ $\left[(-7)\,.\frac{2}{3}\right]^{-2} =$

$= (-7)^{-2}\,.\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} =$ → **Como la potencia es distributiva respecto del producto, primero se distribuyó el exponente (-2) en cada uno de los factores de la base**

$= \left(-\frac{1}{7}\right)^{2}\,.\,\left(\frac{3}{2}\right)^{2} =$ → **Como el exponente de las potencias tiene signo negativo se tomó el recíproco de cada factor y se lo elevó al exponente 2.**

$= \frac{1}{49}\;.\;\frac{9}{4} = \frac{9}{196}$

Aclaración: también se pudo haber resuelto este ejemplo de esta otra forma:

$$\left[(-7).\frac{2}{3}\right]^{-2} =$$

$$= \left(-\frac{14}{3}\right)^{-2} = \left(-\frac{3}{14}\right)^{2} = \frac{9}{196}$$

Primero se resuelve el producto dentro del corchete, luego se eleva a (-2) este resultado parcial; como el exponente (-2) es negativo, se eleva al exponente 2 el recíproco del resultado parcial y por último se calcula la potencia.

A medida que se van combinando operaciones, se acrecienta la posibilidad de cometer errores, sobre todo al operar con signos y al efectuar simplificaciones incorrectas, por ello es conveniente realizar paso a paso cada operación, por lo menos hasta adquirir la práctica suficiente.

Hemos recordado cómo se resuelve una potencia que tiene por exponente un número entero, pero ¿qué sucede si en la potencia aparece un exponente fraccionario?; ¿Cómo resolvemos, por ejemplo, la potencia $4^{3/2}$?

PROCEDIMIENTO: una potencia de exponente fraccionario da origen a una raíz de índice igual al denominador de la fracción y que tiene como radicando a la base de la potencia, que queda elevada a un exponente igual al numerador de la fracción.

En nuestro ejemplo $4^{3/2} = \sqrt[2]{4^3} = \sqrt[2]{64} = 8$

La potencia de exponente fraccionario da origen a una raíz.

Extraer la raíz a un número es encontrar otro, tal que elevado al índice de la raíz permita obtener el radicando. Es decir que, para resolver estas potencias de exponentes fraccionarios, debemos saber resolver raíces.

Recordemos, entonces, las **PROPIEDADES BASICAS DE LOS RADICALES**

PROPIEDADES	EJEMPLO
$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$	$3^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{3}$ $8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$
$x^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x}}$	$4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$
$\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x \cdot y}$	$\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{9 \cdot 2} = \sqrt[3]{18}$ $\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{9 \cdot 3} = \sqrt[3]{27} = 3$
$\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}}$	$\frac{\sqrt[3]{80}}{\sqrt[3]{10}} = \sqrt[3]{\frac{80}{10}} = \sqrt[3]{8} = 2$
$\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[m \cdot n]{x}$	$\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[12]{2}$
$x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m, m \neq n$	$8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^2 = 2^2 = 4$
$\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x$	$\left(\sqrt[8]{7}\right)^8 = 7$

- Cuando no se indica el índice de la raíz, se interpreta que el índice es 2 (también se la conoce como raíz cuadrada).
- La radicación al igual que la potencia es distributiva con respecto al producto y al cociente.

Resolvamos mentalmente algunas raíces sencillas:

✓ $\sqrt[3]{8} = 2$ porque $2^3 = 8$

✓ $\sqrt[4]{81} = 3$

✓ $\sqrt[5]{1} = 1$

✓ $\sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{25}} = \frac{2}{5}$

Veamos un ejemplo de combinaciones sencillas de exponentes y radicales:

$$\checkmark \quad \frac{\sqrt[3]{\frac{1}{8}}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}}{\sqrt{1+\frac{5}{4}}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)} =$$

Iremos resolviendo paso a paso las operaciones, para que se adviertan los pasos que vamos ejecutando:

$$\frac{\sqrt[3]{\frac{1}{8}}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}}{\sqrt{1+\frac{5}{4}}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot 16}{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{6}}$$

Para resolver el producto del numerador, primero se debe extraer la raíz cúbica de uno de los factores $\sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$ **y resolver la potencia del otro factor** $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{4}{1}\right)^{2} = \mathbf{16.}$

Mientras tanto, en el denominador se deberá resolver la raíz cuadrada de la suma $\sqrt{1+\frac{5}{4}} = \sqrt{\frac{4+5}{4}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$ **y luego multiplicar el resultado por** $\frac{1}{6}$

$$\frac{\sqrt[3]{\frac{1}{8}}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}}{\sqrt{1+\frac{5}{4}}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)} = \frac{\frac{1}{\cancel{2}_{1}}\cdot\cancel{16}^{8}}{\frac{\cancel{3}^{1}}{2}\cdot\frac{1}{\cancel{6}_{2}}} = \frac{8}{\frac{1}{4}} = 32$$

Simplificando los productos de fracciones y resolviendo la última fracción obtenida, se llega al resultado definitivo

Hasta aquí hemos desarrollado un breve repaso de las operaciones con números reales, describiendo a través de ejemplos los procedimientos más comunes y advirtiendo sobre los errores más frecuentes.

Para que ejercites los temas vistos, te proponemos resolver las siguientes operaciones con números reales:

¡ATENCIÓN!

La radicación al igual que la potenciación NO es distributiva respecto de la suma, por lo que primero se debe resolver la suma y luego extraerle la raíz al resultado parcial.

ACTIVIDAD 4: Resuelve las siguientes operaciones con números reales:

a) $\frac{2}{3} . \frac{5}{3} + \frac{1}{5} : 3 - \frac{1}{5} . 5 =$

b) $\frac{1}{9} . \frac{3}{2} - \frac{1}{7} . \frac{7}{3} + \frac{1}{2} . \left(-\frac{3}{4}\right) =$

c) $\left(\frac{4}{3}\right)^{-1} . \left(\frac{3}{4}\right)^{2} : \left(\frac{3}{4}\right)^{-2} =$

d) $(-2)^{-2} . (-2)^{-3} : (-2)^{-1} =$

e) $\frac{2^7 : 2^4 : 2^{-3}}{(2^4 . 2^5)^2 : 2^7} =$

f) $\sqrt[4]{(-2)^{-6} . (-2)^8 . (-2)^2} =$

g) $\sqrt{\frac{49}{121}} . \sqrt{\frac{25}{4} - 4} . \left(\frac{7}{22}\right)^{-1} =$

h) $\frac{\frac{2}{5} - \left(-\frac{1}{3}\right)}{-\frac{11}{5}} =$

i) $\frac{-\frac{2}{3}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{3}\right)}{-1} =$

j) $\frac{\left(2 - \frac{3}{4}\right)^2 - 3}{\left(\frac{1}{3} + 4^2\right)^{-1}} =$

k) $\frac{\left(\frac{1}{3} - 1\right)^2}{\sqrt{\frac{11}{25} + 1}} . (-12) =$

Expresiones Algebraicas

1.2.1. Expresiones algebraicas racionales.

En esta Unidad, vamos a trabajar con expresiones algebraicas, que son aquellas en las que figuran números y letras relacionadas por las operaciones aritméticas.

De acuerdo a las operaciones que intervienen, se las clasifican en expresiones algebraicas racionales e irracionales.

Nos dedicaremos al repaso de las expresiones racionales.

Las expresiones algebraicas **RACIONALES** son aquellas en las cuales algunas de sus variables forman parte del denominador o figuran en el numerador con exponente entero.

Por ejemplo, son expresiones algebraicas racionales:

$$x+\frac{1}{y} \quad ; \quad 3x^{-3}+2 \quad ; \quad x^2-4$$

A su vez las Expresiones Algebraicas Racionales se dividen en dos grupos: las Enteras y las Fraccionarias.

Comenzaremos con las Expresiones Algebraicas Enteras:

1.2.1.1. Expresiones algebraicas enteras

Se llama expresión algebraica entera a toda combinación de números y letras relacionadas a través de las operaciones de **adición**, **sustracción**, **multiplicación** y **potenciación** con exponente natural. Por ende, en estas expresiones no aparece ninguna letra en el denominador ni afectada por una raíz o por un exponente negativo.

Ejemplos de expresiones algebraicas enteras:

- ✓ $3x^3+2x^2-3x+1$ es una expresión algebraica **entera** en la variable x.
- ✓ $(x+y)^3-x.y$ es una expresión algebraica **entera** en las variables x e y.

Clasificación de expresiones algebraicas enteras

Las expresiones algebraicas enteras las clasificamos en monomios y polinomios:

Monomio: Es toda expresión algebraica entera constituida por un sólo término. Las letras solamente están afectadas por operaciones de producto y de potencia de exponente natural.

Por Ejemplo: $-3a^3b^2c$

Es un monomio constituido por el número negativo, -3, que recibe el nombre de "coeficiente" y la "parte literal": a^3b^2c. Puede observarse que las operaciones involucradas son la multiplicación y la potencia de exponente natural.

Monomios semejantes: Son los que tienen igual parte literal (las mismas letras elevadas a los mismos exponentes).

Por Ejemplo: $-3a^3b^2c$ es semejante a $5a^3b^2c$

Polinomio: Es una expresión algebraica entera compuesta por la suma algebraica (suma y/o resta) de monomios no semejantes.

Por ejemplo: $3ax^3 + 2bx^2 - 5x + 8$

Es posible realizar operaciones con las expresiones algebraicas enteras, aplicando las mismas propiedades que vimos en los modelos numéricos.

Operaciones con expresiones algebraicas enteras.

Comencemos con las **SUMAS ALGEBRAICAS**

PROCEDIMIENTO: Primero se suman los monomios semejantes que, como dijimos, son aquellos que tienen la misma parte literal y difieren sólo en sus coeficientes. Luego de esta asociación, tenemos la suma de monomios no semejantes, dando por resultado el polinomio.

Algunos ejemplos:

✓ $$2xy^3 + 5xy^3 = 7xy^3$$

Sumamos los monomios semejantes

✓ $$(3x^2y - 2x + 1) + (4x^2y + 6x - 3) =$$

Como en este caso existen paréntesis que agrupan términos, lo primero que debemos hacer es suprimirlos, recordando que si están precedidos por el signo más (+) las operaciones indicadas dentro del paréntesis siguen igual y si las precede un signo menos (-) se deberán cambiar los signos comprendidos dentro del paréntesis

$$3x^2y - 2x + 1 + 4x^2y + 6x - 3 =$$

Asociamos los términos semejantes: $3x^2y$ con $4x^2y$; $-2x$ con $6x$, 1 con -3 y los sumamos.

$$= 7x^2y + 4x - 2$$

Resultado final, al no poder seguir operando con la expresión

Otro ejemplo más:

✓ $$-2xy + y^2 + 5 - (3y^2 + xy) + x =$$

Suprimimos el paréntesis cambiando el signo de los términos que figuran dentro de él

$$= -2xy + y^2 + 5 - 3y^2$$

Sumamos o restamos los términos semejantes

$$= -3xy - 2y^2$$

Este último es el resultado final ya que no es posible realizar ningún otro cálculo con términos que NO son semejantes.

Avanzando con otras operaciones, veremos la **MULTIPLICACIÓN DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS.**

PROCEDIMIENTO: la propiedad distributiva es la herramienta clave para multiplicar expresiones algebraicas. Se las resuelve multiplicando término a término y por último se suman los términos semejantes.

Veamos un ejemplo en el que se multiplican dos expresiones algebraicas:

✓ $(2x+y)(-y+x)=$

Se realiza el producto de una de las sumas por la otra, aplicando la propiedad distributiva del producto respecto a la suma

$= 2x(-y)+2xx+y(-y)+yx=$

Se aplica regla de signos del producto y propiedades del producto de potencias de igual base

$= -2xy+2x^2-y^2+yx=$

Se asocian y suman o restan los términos semejantes

$= -xy+2x^2-y^2$

Otro ejemplo:

✓ $(x-1)(x^3-y+xy)=$

Comenzamos multiplicando los términos del primer paréntesis por los del segundo o a la inversa porque el orden de los factores NO altera el producto.

$=xx^3-xy+xxy-1x^3+1y-1xy$

Efectuamos el producto de la x del primer paréntesis por cada término del segundo paréntesis (prestar atención a los signos) y luego hacemos lo mismo con el -1.

$= x^4-xy+x^2y-x^3+y-xy=$

Se resuelven los productos de cada término cuando sea posible: $xx^3=x^4$; $xxy=x^2y$, sumando o restando los términos semejantes.

$= x^4-2xy+x^2y-x^3$

ACTIVIDAD 5: Resuelve las siguientes operaciones con expresiones algebraicas:

a) $x + x =$

b) $x^2 + x^2 =$

c) $2x + 2x =$

d) $2x^2 + 2x^2 =$

e) $x . x =$

f) $x^2 . x^2 =$

g) $2x . 2x =$

h) $2x^2 . 2x^2 =$

i) $(2x + 5).(-8x + 4) =$

j) $2x^2 + 5x + 2 - (4x^2 - 3x) =$

1.2.1.1.1. Productos notables.

Hay productos de expresiones algebraicas que por la frecuencia con que aparecen se los denomina **ESPECIALES** ó **NOTABLES** y que por el mismo motivo es muy conveniente incluirlos en este repaso.

CUADRADO DE UN BINOMIO

En símbolos:

$$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

$$(x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$$

Binomio: porque es la suma (ó resta) de dos términos no semejantes.

Cuadrado: porque aparece elevado al exponente 2.

PROCEDIMIENTO: el resultado es el cuadrado del primer término más (ó menos) el doble producto del primer término por el segundo más el cuadrado del segundo término.

Procedimiento correcto	Procedimiento incorrecto
$(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$	$(x+a)^2 = x^2 + a^2$
	Porque la potencia NO es distributiva con respecto a la suma (ó la resta).

El procedimiento correcto surge de multiplicar término a término la expresión algebraica de la base por sí misma:

- ✓ $(x+a)^2 = (x+a).(x+a) = x^2 + 2ax + a^2$
- ✓ $(x-a)^2 = (x-a).(x-a) = x^2 - 2ax + a^2$

Desarrollemos el cuadrado del siguiente binomio:

- ✓ $(x-5)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2 = x^2 - 10x + 25$

ACTIVIDAD 6: Desarrolla las siguientes expresiones:

a) $(2-x)^2 =$

b) $(2x+1)^2 =$

PRODUCTO DE UNA SUMA Y UNA DIFERENCIA

En símbolos:

$$(x+a).(x-a) = x^2 - a^2$$

Esta igualdad puede verificarse efectuando la multiplicación y cancelando los términos iguales con signos opuestos:

$$(x+a).(x-a) = x^2 - xa + ax - a^2 = x^2 - a^2$$

PROCEDIMIENTO: La suma por la diferencia de dos bases es igual a la diferencia de los cuadrados de las bases.

Por ejemplo:

✓ $(x+2).(x-2)=x^2-4$

También es frecuente que se deba desarrollar el procedimiento inverso de escribir la expresión algebraica como producto de sus factores utilizando:

Los productos notables son igualdades que se denominan **identidades**, dado que se verifican para **cualquier valor** que se les asignen a sus letras.

1.2.1.1.2. Reglas de factorización

Las más utilizadas son:

FACTOR COMÚN

En símbolos:

$$ax+ay=a.(x+y)$$

Es decir, se trata de la recíproca de la propiedad distributiva del producto respecto a la suma (ó a la resta).

Por ejemplo

$$2x^2+4x=2x.(x+2)$$

Como la expresión $2x$ se repite en los dos términos, se extrae como factor común, que multiplica a $(x+2)$.

La expresión $(x+2)$ se obtiene de dividir cada término del primer miembro por el factor común, así: $2x^2 \div 2x = x$ y $4x \div 2x = 2$

TRINOMIO CUADRADO PERFECTO

En símbolos:

$$x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$$

$$x^2 - 2ax + a^2 = (x - a)^2$$

Si identificamos un trinomio cuadrado perfecto, podemos indicarlo como el cuadrado de la suma (o resta) de sus bases.

Por ejemplo, la expresión:

✓ $4 + 4z + z^2 = (2 + z)$ →

Es un trinomio cuadrado perfecto, porque tenemos dos términos elevados al cuadrado: 2 y z y un tercer término que es el doble producto de los otros dos: $\mathbf{2 \,.\, 2 \,.\, z = 4z}$.

Sin embargo:

$9 + 2y + y^2 =$ **NO** es un trinomio cuadrado perfecto

Porque a pesar de que tiene tres términos y existen dos términos que aparecen elevados al cuadrado (3 e "y"), no aparece el doble producto del primero por el segundo: $\mathbf{2 \,.\, 3 \,.\, y = 6y}$.

ACTIVIDAD 7:

Factoriza las siguientes expresiones.

a) $x^2 - 2x + 1 =$

b) $4x^2 + 16x + 16 =$

DIFERENCIA DE CUADRADOS

En símbolos:

$$x^2 - a^2 = (x + a).(x - a)$$

La diferencia (¡atención!, **NO** la suma) de dos términos cuadrados pueden expresarse como el producto de la suma por la diferencia de sus bases.

Por ejemplo:

✓ $$16 - x^2 = (4 + x).(4 - x)$$

A continuación, te proponemos una Actividad Integradora de estos **Productos Notables**.

ACTIVIDAD 8: Desarrolla o factoriza, según corresponda, cada una de las siguientes expresiones:

a) $(3 - 2x)^2 =$

b) $4x^2 - 36 =$

c) $2x^2 + 8x + 8 =$

d) $16x^4 - 16x^2 =$

Hemos analizado la suma y el producto de expresiones algebraicas, pero puede suceder que debamos considerar expresiones tales como:

$$\frac{8}{x-1} \quad ; \quad \frac{2+3x}{6x}$$

en donde la variable aparece en el denominador

Estas expresiones se denominan: **EXPRESIONES ALGEBRAICAS FRACCIONARIAS**, e implican cocientes:

1.2.1.2. Expresiones algebraicas fraccionarias

Las expresiones algebraicas fraccionarias son cocientes de polinomios.

En símbolos:

Expresiones Algebraicas Fraccionarias tienen la forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son **POLINOMIOS**.

Ejemplos de expresiones algebraicas FRACCIONARIAS:

- ✓ $\frac{3x^3+2x^2-3x+1}{3x^2+2x-3}$
- ✓ $\frac{2x^4-8}{x-2}$

¡ATENCIÓN! No existe una regla que sea aplicable en cada caso. Dependerá mucho de tu ingenio reconocer qué regla de factorización o qué producto notable conviene aplicar en el caso específico de manera de simplificar la expresión y arribar al resultado.

Operaciones con expresiones algebraicas fraccionarias.

Las reglas que guían las operaciones con expresiones algebraicas fraccionarias son las mismas reglas de las fracciones, también nombradas en este material.

Veamos algunos ejemplos en los que debamos resolver expresiones algebraicas fraccionarias:

1° se saca factor común en el numerador del primer factor y en el denominador del segundo factor

$$\frac{3x+9}{6}\cdot\frac{18}{5x+15}=\frac{3.\cancel{(x+3)}}{\cancel{6}_{1}}\cdot\frac{\overset{3}{\cancel{18}}}{5.\cancel{(x+3)}}=\frac{3\,.\,3}{5}=\frac{9}{5}$$

2° se simplifican los factores del numerador con los del denominador, o sea, $(x+3)$ con $(x+3)$ y el 18 con el 6; luego se multiplica derecho.

Veamos otro ejemplo resuelto:

Se resolvió la suma del numerador.

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x^2-1}=\frac{(x-1)+1}{x^2-1}=\frac{x}{x^2-1}$$

Se buscó un común denominador para los dos sumandos, recuerda que $\boldsymbol{x^2-1=(x-1).(x+1)}$

ADVIERTE que en el resultado no se pudo simplificar las x del numerador y denominador ya que la x^2 está afectada por la resta del 1, no por el producto.

Seguidamente te proponemos algunas actividades que incluyen operaciones con expresiones algebraicas racionales, junto a casos de factoreo, para reafirmar los temas repasados.

¡A PRACTICAR ¡

ACTIVIDAD 9: Factoriza, resuelve y simplifica, según corresponda:

a) $\frac{x^2+8x+16}{x+4}=$

b) $\frac{x-2}{x+2}-\frac{x+2}{x-2}=$

c) $\frac{4x^5-4x}{9x^6-9x^2}=$

d) $\frac{x^2-4}{x^2+2x}\cdot\frac{x^2}{x-2}=$

e) $\frac{2x+x^2}{x}:\frac{x^2}{2-x}=$

f) $\frac{\frac{4x}{x^2-1}}{\frac{2x^2+8x}{x-1}}=$

1.3. Razones y proporciones:

Razón: es el cociente de dos números en un cierto orden, distinto de cero

Proporción: Dados cuatro números distintos de cero, en un cierto orden, constituyen una proporción si la razón de los dos primeros es igual a la razón de los dos segundos.

$$a, b, c, d$$

$$\left.\begin{array}{l} si\ \dfrac{a}{b} = m \\ y\ \dfrac{c}{d} = m \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad Proporción$$

se lee: a es de b como c es de d

Ejemplo: 6,4,3,2

$$\left.\begin{array}{l} si\ \dfrac{6}{4} = 1{,}5 \\ y\ \dfrac{3}{2} = 1{,}5 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \quad Proporción$$

Clasificación

- ✓ **Proporción ordinaria**

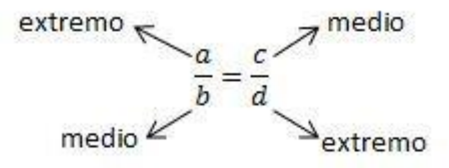
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}\ ;\ \frac{7}{8} = \frac{14}{16}$$

- ✓ **Proporción continúa**

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c}\ ;\ \frac{4}{6} = \frac{6}{9}$$

Una proporción es continua cuando sus medios son iguales.

Términos de una proporción



Propiedades de las proporciones

- ✓ En toda proporción, el producto de los extremos es al producto de los medios.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \qquad a\cdot d=b\cdot c \qquad \frac{6}{4}=\frac{3}{2} \qquad \underbrace{6\cdot 2}_{12}=\underbrace{4\cdot 3}_{12}$$

- La suma del antecedente y consecuente de la primera razón es su antecedente como la suma del antecedente y consecuente de la segunda razón es su antecedente.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \qquad \frac{a+b}{a}=\frac{c+d}{c} \qquad \frac{6}{4}=\frac{3}{2} \qquad \frac{6+4}{6}=\frac{3+2}{3} \qquad \frac{10}{6}=\frac{5}{3} \qquad 10\cdot 3=6\cdot 5 \qquad 30=30$$

- La suma del antecedente y consecuente de la primera razón es su consecuente como la suma del antecedente y consecuente de la segunda razón es su consecuente.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \qquad \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d} \qquad \frac{6}{4}=\frac{3}{2} \qquad \frac{6+4}{4}=\frac{3+2}{2} \qquad \frac{10}{4}=\frac{5}{2} \qquad 20=20$$

- La diferencia del antecedente y consecuente de la primera razón es su antecedente como la diferencia del antecedente y consecuente de la segunda razón es su antecedente.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \qquad \frac{a-b}{a}=\frac{c-d}{c} \qquad \frac{6-4}{6}=\frac{3-2}{3} \qquad \frac{2}{6}=\frac{1}{3} \qquad 6=6$$

- La diferencia del antecedente y consecuente de la primera razón es su antecedente como la diferencia como la diferencia del antecedente y consecuente de la segunda razón es su consecuente.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \qquad \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d} \qquad \frac{6-4}{4}=\frac{3-2}{2} \qquad \frac{2}{4}=\frac{1}{2} \qquad 4=4$$

- La suma de antecedente y consecuente de la primera razón es su diferencia como la suma de antecedente y consecuente de la segunda razón su diferencia.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \qquad \frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d} \qquad \frac{6+4}{6-4}=\frac{3+2}{3-2} \qquad \frac{10}{5}=\frac{5}{1} \qquad 10=10$$

- La diferencia de antecedente y consecuente de la primera razón es l suma como la diferencia de antecedente y consecuente de la segunda razón es su suma.

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ $\quad \frac{a-b}{a+b} = \frac{c-d}{c+d}$ $\quad \frac{6-4}{6+4} = \frac{3-2}{3+2}$ $\quad \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$ $\quad 10 = 10$

Hallar el valor de un extremo

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$$

De acuerdo con la primera propiedad $a \cdot c = b \cdot c$

Haciendo pasaje al otro miembro: $x = \frac{b.c}{a}$

En toda proporción, un extremo es igual al producto de los medios divididos por el otro extremo.

$$\frac{5}{6} = \frac{10}{x} \qquad x = \frac{6 \cdot \cancel{10}^{1}}{\cancel{5}_{1}}; x = 12$$

$$\frac{x}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow x = \frac{d \cdot c}{d}$$

$$\frac{x}{6} = \frac{10}{12} \Rightarrow x = \frac{\cancel{6}^{1} \cdot \cancel{10}^{5}}{\cancel{12}_{\cancel{2}_{1}}} = 5; x = 5$$

Hallar el valor del medio de una proporción

En toda proporción, el medio es igual al producto de los extremos dividido por el medio conocido.

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{d} \Rightarrow x \frac{a \cdot d}{b}$$

$$\frac{5}{6} = \frac{x}{12} \Rightarrow x \frac{5 \cdot 12}{6} = 10 \qquad x = 10$$